FONCTIONS

Objectifs : *Fonctions* $x \mapsto \sqrt{x}$ *et* $x \mapsto |x|$. *Connaître le sens de variation et la représentation graphique de ces fonctions.*

ROC : Démontrer que la fonction racine carrée est croissante sur $[0\,;+\infty[$.

ROC : Justifier les positions relatives des courbes représentatives des fonctions $x \mapsto x$, $x \mapsto x^2$ *et* $x \mapsto \sqrt{x}$.

Avec u une fonction connue, k une fonction constante et λ *un réel, connaître le sens de variation des fonctions u + k,* λu , $\sqrt{u}$ et $\frac{1}{u}$. *Exploiter ces propriétés pour déterminer le sens de variation de fonctions simples.*

I- La fonction racine carrée

1) Etude de la fonction racine carrée

Tout nombre positif x a une racine carrée notée $\sqrt{x}$; c'est le nombre positif dont le carré est x.

Définition : La fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ qui a tout nombre réel positif x associe sa racine carrée $\sqrt{x}$ est appelée **fonction racine carrée**.

Propriété : (ROC) **La fonction racine carrée est strictement croissante sur** $[0\,;+\infty[$.

Exercice 1 : En déduire le tableau des variations de la fonction racine carrée.
Faire un tableau de valeurs pour x de 0 à 9, avec un pas de 1. (Arrondir au dixième).
Faire un tableau de valeurs pour x de 0 à 1, avec un pas de 0,1. (Arrondir au centième).
Tracer la courbe représentative de la fonction racine carrée dans un repère orthonormal.

Exercice 2 : Dans chaque cas, sans les calculer, comparer $\sqrt{7{,}45}$ et $\sqrt{7{,}5}$; $\sqrt{3}$ et $\sqrt{\pi}$.

Exercice 3 : Résoudre l'inéquation : $\sqrt{x} \le \frac{7}{2}$.

2) Comparaison de x, $\sqrt{x}$ et x^2.

Exercice 4 : Tracer les courbes représentatives des fonctions $x \mapsto x$, $x \mapsto x^2$ *et* $x \mapsto \sqrt{x}$ dans un repère orthonormal, pour $x \in [0\,;2]$.

Propriété : (ROC) **Pour tout nombre réel *x* de l'intervalle [0 ; 1], on a :** $x^2 \le x \le \sqrt{x}$.
Pour tout nombre réel *x* de l'intervalle]1 ; + ∞[, on a : $\sqrt{x} < x < x^2$.

II- La fonction valeur absolue

1) Valeur absolue d'un nombre réel

Définition : La valeur absolue d'un nombre réel x est notée $|x|$ et elle est définie par

$$|x| = \begin{cases} -x \text{ si } x < 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \\ x \text{ si } x > 0 \end{cases}$$

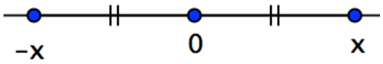
C'est la distance entre x et 0.

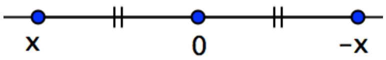
Exemples : $|-3| = \ldots\ldots$ $|2| = \ldots\ldots$ $\left|-\frac{5}{4}\right| = \ldots\ldots$ $|0| = \ldots\ldots$

$|\sqrt{3}| = \ldots\ldots$ $|\sqrt{2}+1| = \ldots\ldots$ $|\sqrt{3}-4| = \ldots\ldots\ldots\ldots$

Remarques

1. $|x|$ est donc toujours un nombre positif (« positif » sous-entend « positif ou nul »)
2. $|-x| = |x|$





2) La fonction valeur absolue

Définition : La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ qui a tout nombre réel positif x associe sa valeur absolue $|x|$ est appelée **fonction valeur absolue**.

Propriété : (ROC) **La fonction valeur absolue est une fonction affine par intervalle et est donc strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$ et strictement décroissante sur $]-\infty\,;0]$.**

Exercice 5 : En déduire le tableau des variations de la fonction valeur absolue.
Tracer la courbe représentative de la fonction valeur absolue dans un repère orthonormal.

Propriété : Dans un repère orthogonal, la courbe représentative de la fonction valeur absolue est **symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.**

Exercice 6 : Résoudre dans $\mathbb{R}$: $|\boldsymbol{x}-2| = 2\boldsymbol{x}-1$ et $|\boldsymbol{x}| \geq 3$

III- Sens de variation des fonctions associées

Soient u une fonction connue sur un intervalle I, k une fonction constante et λ un réel non nul.
Propriété : (ROC) Les fonctions ***u* et *u* +*k* ont le même sens de variation** sur l'intervalle I.
Si $\lambda > 0$, alors les fonctions ***u* et λ *u* ont le même sens de variation** sur l'intervalle I.
Si $\lambda < 0$, alors les fonctions ***u* et λ *u* ont des sens de variation contraires** sur l'intervalle I.
Si $\forall x \in I, u(x) \geq 0$, alors les fonctions ***u* et $\sqrt{u}$ ont le même sens de variation** sur l'intervalle I.
Si $\forall x \in I, u(x) \neq 0$, alors les fonctions ***u* et $\frac{1}{u}$ ont des sens de variation contraires** sur l'intervalle I.

Exercice 7 : Déterminer le sens de variation des fonctions $f(x) = -5(x^2+3)$; $g(x) = \sqrt{-2x+1}$ et $h(x) = \dfrac{1}{2x-4}$.

Remarque : On ne peut pas généraliser sur le sens de variation de somme ou de produit de fonctions.