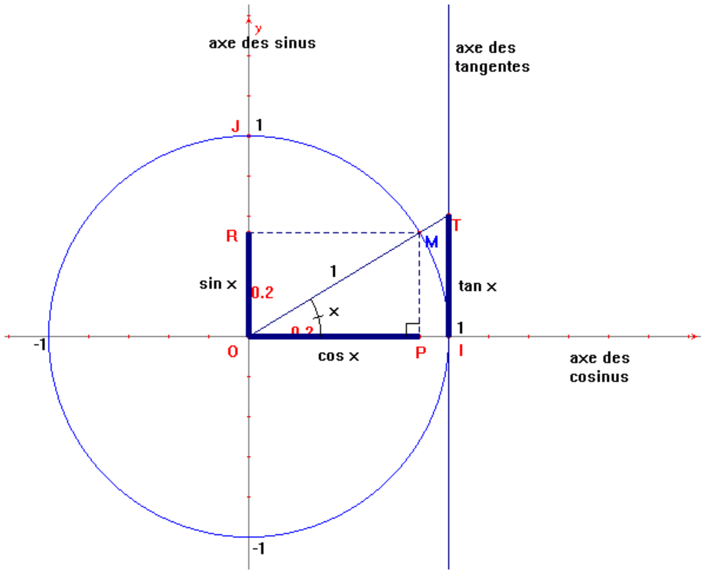
Fonctions trigonométriques

I] Les fonctions sinus et cosinus (rappels de seconde)

1) Définitions et valeurs remarquables



Définitions : Soit M un point du cercle trigonométrique tel que $\widehat{IOM} = x$ rad .

Le *cosinus de x*, noté cos *x*, est l'abscisse de M.
Le *sinus de x*, noté sin *x*, est l'ordonnée de M.
La ***tangente de x*** , noté tan x , est donné par l'abscisse de T sur l'axe (I T)
Propriétés : **Pour tout *x* réel,**

$-1 \leq \cos x \leq 1$;

$-1 \leq \sin x \leq 1$;

$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$;

tan x $\in \mathbb{R}$

Valeurs remarquables

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
cos x	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
sin x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tan x	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	N'existe pas	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

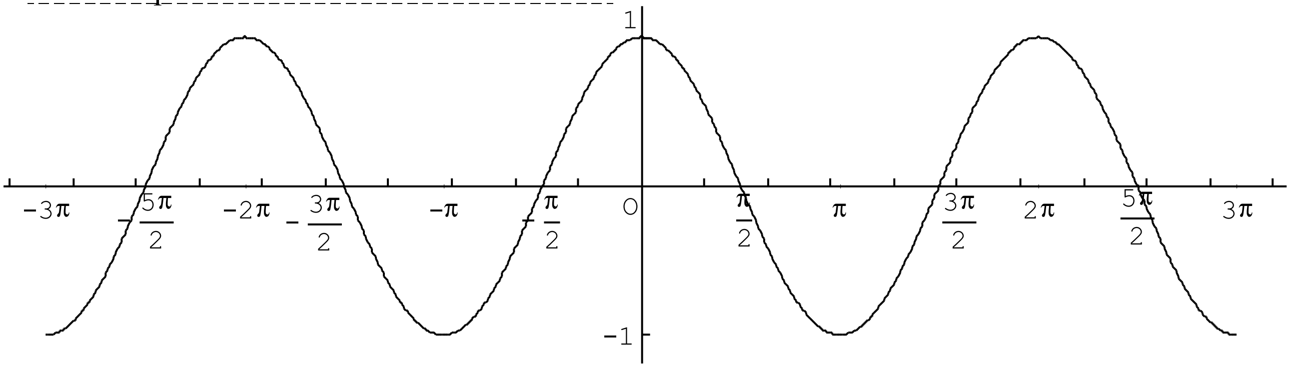
2) La fonction cosinus

$$\cos : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & [-1 ; 1] \\ x & & \cos x \end{array}$$

Ensemble de définition = $\mathbb{R}$. (rappel de 1er : $\cos' x = -\sin x$)
Quel que soit le réel x, $\cos(x + 2\pi) = \cos x$; On dit que la fonction cosinus est ***périodique de période 2π.***
Quel que soit le réel x, $\cos(-x) = \cos x$ La fonction cosinus est ***paire*** .
On peut donc étudier la fonction cosinus sur [0 ; π] , puis faire la symétrie par rapport à l'axe des abscisses (parité) , puis des translations (période).
Tableau des variations :

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π
cos	-1	↗	0	↗	1	↘	0	↘	-1

Courbe représentative de la fonction cosinus :



3) La fonction sinus sin : $\mathbb{R} \longrightarrow [-1\,;1]$
$x \mapsto \sin x$

Ensemble de définition = $\mathbb{R}$. (rappel de 1er : $\sin' x = \cos x$)

Quel que soit le réel x, $\sin(x + 2\pi) = \sin x$; On dit que la fonctions sinus est ***périodique de période 2π.***

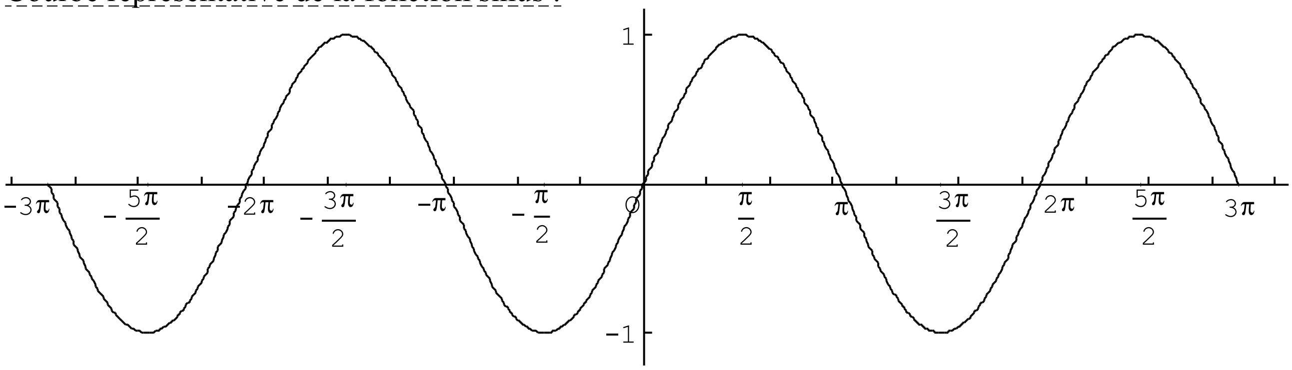
Quel que soit le réel x, $\sin(-x) = -\sin x$ La fonction sinus est ***impaire*** .

On peut donc étudier la fonction sinus sur $[\,0\,;\pi\,]$, puis faire la symétrie par rapport à l'origine du repère (parité) , puis des translations (période).

Tableau des variations :

x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π
sin	0 ↘	-1 ↗	0 ↗	1 ↘	0

Courbe représentative de la fonction sinus :



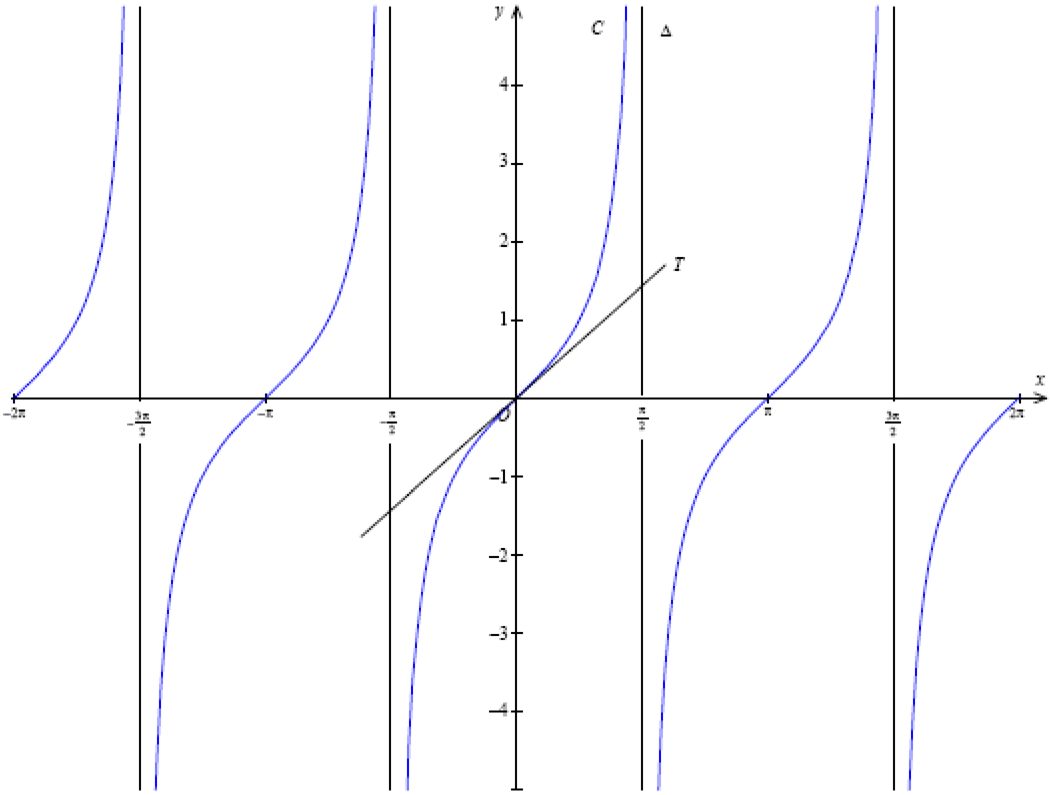
II] La fonction tangente

Définition : $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$, donc $\tan x$ existe si et seulement si $\cos x \neq 0$ c'est-à-dire si $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\,\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$. On note D l'ensemble de définition de la fonction tangente : $D = \mathbb{R} - \{\dfrac{\pi}{2} + k\,\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}\}$

Propriétés : La fonction tangente est π périodique et impaire.

Conséquence : on réduit l'intervalle d'étude à $]\,-\dfrac{\pi}{2}\,;+\dfrac{\pi}{2}\,[$

Propriétés: la fonction tangente est dérivable en tout x de D et $\tan' x = 1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ >0 donc la fonction tangente est strictement croissante sur D.



III] Equations trigonométriques

1) Résolution des équations cos x = a et sin x = a ($x \in \mathbb{R}$)

- Si a $\notin$ [-1 ; +1] alors ces équations n'ont pas de solutions.
- Si a $\in$ [-1 ; +1] alors ces équations ont une infinité de solutions dans $\mathbb{R}$:

Pour sin x = a , on cherche une solution particulière α sur [0 ; π] telle que sin α = a = sin x , on obtient toutes les solutions sous la forme :

$$\boxed{\begin{cases} x = \alpha + 2k\pi \\ x = \pi - \alpha + 2k\pi \end{cases}}$$ avec k $\in$ $\mathbb{Z}$.

Pour cos x = a , on cherche une solution particulière α sur [0 ; π] telle que cos α = a = cos x , on obtient toutes les solutions sous la forme :

$$\boxed{\begin{cases} x = \alpha + 2k\pi \\ x = -\alpha + 2k\pi \end{cases}}$$ avec k $\in$ $\mathbb{Z}$.

Exercice : Résoudre les équations suivantes :

cos x = - 0,5 dans $\mathbb{R}$; sin x = $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ sur [0 ; 2 π] ; 2 sin(3x) = 1 pour x $\in$ [0 ; 6 π].

2) Résolution de l'équation tan x = a , $x \in$ D

Pour a réel quelconque, on cherche une solution particulière α sur [- $\dfrac{\pi}{2}$; $\dfrac{\pi}{2}$] telle que tan α = a = tan x, on obtient toutes les solutions sous la forme $x = \alpha + k\pi$ avec k $\in$ $\mathbb{Z}$.