La fonction exponentielle

1) Définition : On appelle fonction exponentielle , l'unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$, telle que

$$f' = f \text{ et } f(0)=1.$$

On note $f(x)$ = **exp(x).**

Etymologie : **EXPONENTIELLE** (adjectif ou nom féminin) du latin *exponens* : dont l'exposant est variable ou inconnu.

2) Propriétés de la fonction exponentielle :

a. la fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et ses dérivées successives lui sont égales.

$$\textbf{(exp)'}(x) = \textbf{exp}(x) \; ; \; (\exp)^{(n)} = \exp$$

b. La fonction exp est continue sur $\mathbb{R}$ et **exp(0)=1**.

3) Théorème : Pour tout réel x , $\exp(x) > 0$ **ROC**

Conséquence : La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ (car (exp) ' = exp > 0)

4) Théorème : La fonction exponentielle est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0;+\infty[$.

Conséquences : L'image de 1 par la fonction exponentielle est unique et est noté e (**exp(1) = $\mathbf{e^1}$ = e**)
Ce **nombre e** est un nombre irrationnel proche de 2,718.
On peut alors adopter la notation **exp(x) = $\mathbf{e^x}$**

5) Relation fonctionnelle : Pour tous réels a et b , on a :

$$\textbf{exp(a+b) = exp(a)} \times \textbf{exp(b)} \quad \text{ou} \quad e^{a+b} = e^a \times e^b \qquad \textbf{ROC}$$

Conséquences : $e^{-a} = \dfrac{1}{e^a}$; $e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b}$; $e^{nx} = \left(e^x\right)^n$

Exercice 1 : Simplifier les expressions $e^x \times e^{-x}$; $\left(e^x + e^{-x}\right)^2 - \left(e^x - e^{-x}\right)^2$

Exercice 2 : Vérifier que pour tout réel x on a : $\dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \dfrac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$

6) La fonction $f(x) = e^x = \exp(x)$

Etude des limites : $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$;

asymptote d'équation $y = 0$ (=axe des abscisses) au voisinage de $-\infty$.

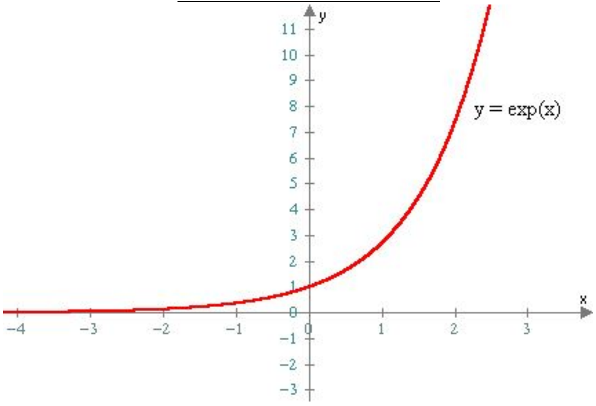
$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$ donc pour x voisin de 0 on a : $e^x \simeq 1 + x$, on a alors pour n assez grand $e \cong \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$

et aussi $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} x e^x = 0$;

Exercice 3 : Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^x - 2}{e^x + 1}$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x - 2}{e^x + 1}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{7x}{e^x - 1}$

Tableau de variation **Allure de la courbe**

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$\exp'(x)$				$+$			
$\exp x$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	e	$\nearrow$	$+\infty$



7) Fonction composée : **Propriété :** Soit u une fonction définie sur un intervalle I :

$$\left(e^{u(x)}\right)' = u'(x)\, e^{u(x)}$$

Exercice 4 : $f(x) = e^{x^2+3x}$; $g(x) = \dfrac{1}{3} e^{(\sqrt{x})}$ déterminer I , f' et g' .

Étudier $f_k(x) = e^{-kx}$ et $g_k(x) = e^{-kx^2}$ avec k constante positive, 2 fonctions très utiles en probabilité, statistiques ou en biologie.

8) Equations ou inéquations avec exp :

a. Transformer l'équation ou l'inéquation pour obtenir exp((u(x)) = exp(v(x)) ou < 0 ou > 0.
b. Résoudre l'équation ou inéquation u(x)=v(x) ou u(x) < v(x) ou u(x) > v(x) car la fonction exp est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5 : Résoudre dans $\mathbb{R}$: $e^{3x+4} = \dfrac{e^x}{e^5}$; $e^{2-3x} < 1$

Résolution d'équations ou d'inéquations avec des (exp)² ou (exp)³ ….. :

a) Poser le changement de variable X = exp (u(x)) ; **il faut que X > 0**
b) Résoudre l'équation ou inéquation avec les X.
c) En déduire pour les X > 0 les solutions pour x

Exercice 6 : Résoudre dans $\mathbb{R}$: $2e^{2x} + e^x - 3 = 0$