Equation différentielle 1^{er} partie

Introduction historique : Descartes , en 1639, cherchait à construire une courbe connaissant une propriété de ses tangentes. La recherche d'une fonction connaissant une propriété caractéristique de sa dérivée, occupa nombre de Mathématiciens et Physiciens du $17^{ème}$ siècle. La résolution de ces ***équations différentielles*** permis de mieux comprendre l'univers.

1) Définition 1 : On appelle **équation différentielle** le problème consistant à rechercher les éventuelles fonctions, appelées solutions de l'équation et traditionnellement notées $y(x)$, vérifiant une relation donnant, en tout point x de l'intervalle I de définition de y , la dérivée $y'(x)$ en fonction des réels x et $y(x)$.
Exemple : $y^2 + 3y = y'$.

Cette relation peut être complétée par une condition initiale, imposant à ces fonctions y de prendre une valeur réelle donnée c en un point a de I ($y(a) = c$).
Rq : Une équation différentielle peut n'avoir aucune solution, ou au contraire en posséder plusieurs, voire une infinité. Dans les équations avec condition initiale posées en Terminale S, il y a toujours exactement une solution.

2) Résolution de l'équation différentielle : $\boxed{y' = y \quad \text{et} \quad y(0) = 1}$
Cela revient à chercher un couple (I ; y) satisfaisant aux 3 conditions suivantes :

- y est une fonction qui doit être égale à sa dérivée.
- y doit prendre la valeur 1 en 0.
- y doit être définie sur un intervalle I contenant 0 , le plus grand possible.

Propriété : **ROC** S'il existe une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$, alors f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.
Indication : poser $h(x) = f(x) \times f(-x)$

Théorème et définition : Il existe une et une seule fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$, **on l'appelle fonction exponentielle , notée**

$$f(x) = exp(x)$$

(L'existence est admise, il faut démontrer l'unicité) **ROC**

Exercice : Avec la méthode d'EULER, tracer une approximation de cette fonction sur [0 ; 1] avec un pas de 0,2.