Droites et plans dans l'espace

I – Représentations paramétriques d'une droite dans l'espace

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

1. Représentations paramétriques d'une droite

La droite (D) passant par A(x_A ; y_A ; z_A) et de vecteur directeur $\vec{u}\left(\alpha;\beta;\gamma\right)$ est l'ensemble des points M(x ; y ; z) tels que : $(S)\ \begin{cases} x=\alpha t+x_A \\ y=\beta t+y_A \\ z=\gamma t+z_A \end{cases}\quad t\in\mathbb{R}$.

Le système (S) est appelé **une représentation paramétrique** de la droite (D) dans le repère $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ et on dit que t est **le paramètre.**

Exercice 1 : Donner une représentation paramétrique de la droite passant par les points A (-1 ; 2 ; -3) et B (1 ; -1 ; 1) . Le point C (1 ; 2 ; 3) appartient-il à la droite (AB) ?

Dans l'espace, deux droites peuvent être :

- Coplanaires (strictement parallèles, ou confondues, ou sécantes)
- Non coplanaires

Définition et propriété : Deux droites (d) et (d') de l'espace sont orthogonales si et seulement si leurs vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{u}\,'$ sont orthogonaux $\left(\vec{u}\,.\vec{u}\,'=0\right)$

Définition et propriété : Deux droites (d) et (d') de l'espace sont perpendiculaires si et seulement si elles sont orthogonales et coplanaires (donc ont un point commun).

Exercice 2 : Considérons les droites : (d) $\begin{cases} x=t+1 \\ y=2t-3 \\ z=-t+2 \end{cases}\quad t\in\mathbb{R}$ et (d') $\begin{cases} x=3t'+2 \\ y=-t'-1 \\ z=t'+1 \end{cases}\quad t'\in\mathbb{R}$.

Étudier l'intersection des deux droites (d) et (d'), si elle existe. Sont-elles perpendiculaires ?

Dans l'espace, une droite (d) de vecteur directeur $\vec{u}$ et un plan (P) de vecteur normal $\vec{n}$ peuvent être :

- Strictement parallèles ($\left(\vec{u}\,.\vec{n}=0\right)$ et aucun point en commun)
- La droite (d) est incluse dans le plan (P) ($\left(\vec{u}\,.\vec{n}=0\right)$ et un point en commun)
- Sécantes $\left(\vec{u}\,.\vec{n}\neq 0\right)$

Cas particulier : Propriété : Une droite (d) est orthogonale à un plan (P) si et seulement si elle est orthogonale à deux droites sécantes du plan (P) ; donc si et seulement si son vecteur directeur $\vec{u}$ et orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (P).

Exercice 3 : Déterminer l'intersection de la droite (d) : $\begin{cases} x=t+1 \\ y=2t-3 \\ z=-t+2 \end{cases}$ et du plan (P) : x + 2y - 3z + 4 = 0

2. Représentations paramétriques d'un segment, d'une demi-droite

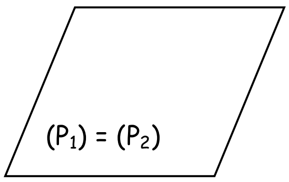
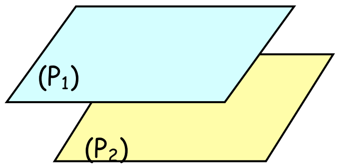
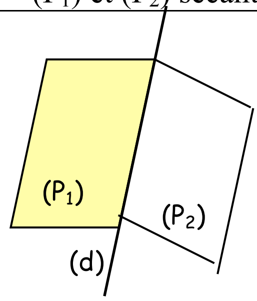
A et B sont deux points distincts de l'espace et on note $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$. L'appartenance d'un point M au segment [AB] ou bien à la demi-droite [AB) s'obtient en adaptant l'énoncé de la conclusion ci-dessus :

1. pour le segment, il suffit de remplacer dans le système (S) : « $t \in \mathbb{R}$ » par « $\boxed{t \in [0;1]}$ ».
2. pour la demi-droite [AB), il suffit de remplacer dans le système (S) : « $t \in \mathbb{R}$ » par « $\boxed{t \in [0;+\infty[}$ »

II – Intersections de droites et de plans

1. Intersection de deux plans (P_1) et (P_2)

a) Le point de vue géométrique

(P_1) et (P_2) confondus	(P_1) et (P_2) strictement parallèles	(P_1) et (P_2) sécants
		

b) Le point de vue algébrique

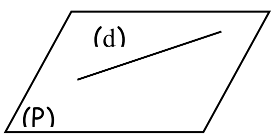
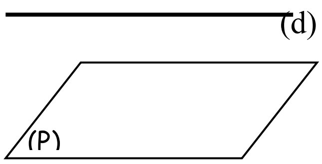
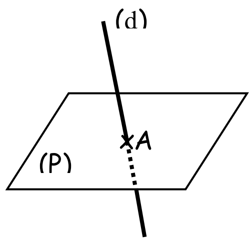
Deux plans d'équations ax + by +cz + d = 0 et a'x + b'y +c'z + d' = 0 sont parallèles lorsque leurs vecteurs normaux sont colinéaires, c'est-à-dire lorsque les triplets (a ; b ; c) et (a' ; b' ; c') sont proportionnels.
Une droite pourra être définie par intersection de deux plans, c'est-à-dire par un système de deux équations cartésiennes : $(S)\ \begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ a'x+b'y+c'z+d'=0 \end{cases}$ avec (a ; b ; c) et (a' ; b' ; c') non proportionnels.

Exercice 4 : Considérons les plans d'équations :

$$(P): 2x+y-z-2=0 \text{ et } (P'): x+3y+7z-11=0.$$

Démontrer que les deux plans sont sécants.
Donner une représentation paramétrique de la droite (d), intersection de ces deux plans.

2. Intersection d'un plan (P) et d'une droite (d)

(d) est contenue dans (P)	**(d) est strictement parallèle à (P)**	**(d) et (P) sont sécants en un point**
		

<u>Propriété</u> :Le plan (P) d'équation ax + by + cz +d = 0 et la droite (d) passant par un point A et de vecteur directeur $\vec{u}(\alpha;\beta;\gamma)$ sont sécant si le vecteur normal du plan (P) n'est pas orthogonal au vecteur directeur de (d) donc si $\vec{u}\bullet\vec{n}\neq 0$ c'est à dire si $\alpha a+\beta b+\gamma c\neq 0$

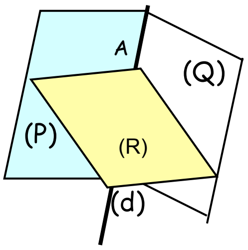
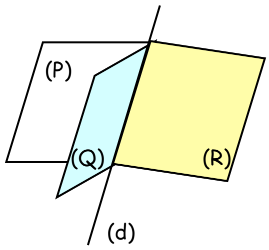
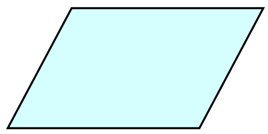
<u>Exercice 5</u> : Dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ le plan (P) a pour équation : 5x + y – z + 3 = 0 et la droite (d) pour représentation paramétrique : $\begin{cases} x = t \\ y = 1-6t \\ z = 3-t \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$.

Étudier position de la droite (d) et du plan (P).

III - Intersection de trois plans

1. Le point de vue géométrique

(P), (Q) et (R) sont trois plans de l'espace.
Soit : **ils n'ont aucun point commun (3 cas)** (3 parallèles, 2 parallèles et 1 sécant ; sécants 2 à 2);
Soit

Ils ont un seul point commun	Leur intersection est une droite	Leur intersection est un plan
		

L'intersection de trois plans peut être : l'ensemble vide, un point, une droite ou un plan.

(On pourra déterminer ces intersections en écrivant les systèmes formés avec les équations cartésiennes des plans.)

2. Le point de vue algébrique

Dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, les plans (P), (Q) et (R) ont respectivement pour équations cartésiennes $ax+by+cz+d=0, a'x+b'y+c'z+d'=0$ *et* $a''x+b''y+c''z+d''=0$, où a, b, c puis a', b', c' puis a'', b'', c'' ne sont pas tous les trois nuls. Pour étudier l'intersection des trois plans, on peut résoudre le système : $\begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ a'x+b'y+c'z+d'=0 \\ a''x+b''y+c''z+d''=0 \end{cases}$. Ce système, d'après le point de vue géométrique, a soit aucun triplet solution, soit un triplet solution, soit une infinité de triplets solutions.

<u>Exercice 6</u> : Dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, le plan (P) a pour équation : $2x-y+z-7=0$, le plan (Q) a pour équation : $x+2y-z-6=0$, le plan (R) a pour équation : $-x+y+2z-11=0$.
Étudier l'intersection de ces trois plans.