Objectifs *: Tangente à la courbe représentative d'une fonction dérivable en un point.*
Dérivée d'une somme, d'un produit et d'un quotient.
Lien entre signe de la dérivée et sens de variation. Extremum d'une fonction.

I- Equation de la tangente

Rappel : La droite qui passe par A(a ; $f(a)$) et **de coefficient directeur *f ' (a)* est la tangente** à la courbe représentative de la fonction f au point a.

Théorème 1 : (ROC) : L'équation de la tangente à la courbe représentative d'une fonction f en un point d'abscisse a est : $\boxed{y = f'(a)\times(x-a)+f(a)}$

Exercice 1 : Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a :

a) $f(x) = x^2 + 3x + 1$ et $a = 2$

b) $f(x) = 3/x$ et $a = 4$

II- Opération sur les fonctions dérivées

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I.

Théorème 2 : (ROC) La fonction $u + v$ est dérivable sur I et : $\boxed{(u+v)' = u' + v'}$

Théorème 3 : (ROC) La fonction $u.v$ est dérivable sur I et : $\boxed{(uv)' = u'v + uv'}$

Exercice 2 : Dériver les fonctions suivantes définies sur I :

a) $f(x) = 2x - \dfrac{3}{x}$ I = $\mathbb{R}^*$

b) $f(x) = 5x^4 - 2x^3 + 6x^2 - 5x + 1$; $I = \mathbb{R}$

c) $f(x) = 2x\sqrt{x}$; $I =]0 ; +\infty[$

De plus si v est une fonction telle que : $\forall x \in \mathbb{R}, v(x) \neq 0$,

Théorème 4 : (ROC) La fonction $\dfrac{1}{v}$ est dérivable sur I et : $\left(\dfrac{1}{v}\right)' = -\dfrac{v'}{v^2}$

Théorème 5 : (ROC) La fonction $\dfrac{u}{v}$ est dérivable sur I et : $\boxed{\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{vu' - uv'}{v^2}}$

Exercice 3 : Dériver les fonctions suivantes définies sur I :

a) $f(x) = \dfrac{2}{3x-1}$; $I = \mathbb{R} - \left\{\dfrac{1}{3}\right\}$

b) $f(x) = \dfrac{3x+1}{x-2}$; $I = \mathbb{R} - \{2\}$

c) $f(x) = \dfrac{3x^2-1}{2}$; $I = \mathbb{R}$

III- Signe de la dérivée et variations

Rappels de seconde :

• f est **croissante sur I** signifie que pour tous réels a et b de I tels que $a < b$ on a $f(a) \leq f(b)$

• f est **strictement croissante sur I** signifie que pour tous réels a et b de I tels que $a < b$ on a $f(a) < f(b)$

• f est **décroissante sur I** signifie que pour tous réels a et b de I tels que $a < b$ on a $f(a) \geq f(b)$

• f est **strictement décroissante sur I** signifie que pour tous réels a et b de I tels que $a < b$ on a $f(a) > f(b)$

Remarque

Lorsqu'on écrit qu'une fonction est croissante ou décroissante, il faut toujours préciser sur quel intervalle.

• f est **monotone sur I** signifie qu'elle ne change pas de variation sur I : soit toujours croissante sur I, soit toujours décroissante sur I.

• f est **strictement monotone sur I** signifie qu'elle est soit toujours strictement croissante sur I, soit toujours strictement décroissante sur I.

Dans les théorèmes ci-dessous $\boxed{f \text{ désigne une fonction dérivable sur un intervalle I}}$

Théorème 6

(1) Si f est croissante sur I alors pour tout $x \in \mathrm{I}$, $f'(x) \geq 0$ (c'est-à-dire la fonction dérivée est positive sur I)

(2) Si f est constante sur I alors pour tout $x \in \mathrm{I}$, $f'(x) = 0$ (c'est-à-dire la fonction dérivée est nulle sur I)

(3) Si f est décroissante sur I alors pour tout $x \in \mathrm{I}$, $f'(x) \leq 0$ (c'est-à-dire la fonction dérivée est négative sur I)

Théorème 7 (admis)

(1) Si pour tout $x \in \mathrm{I}$, $f'(x) \geq 0$ alors f est croissante sur I

(2) Si pour tout $x \in \mathrm{I}$, $f'(x) = 0$ alors f est constante sur I

(3) Si pour tout $x \in \mathrm{I}$, $f'(x) \leq 0$ alors f est décroissante sur I.

(4) Si f' est strictement positive sur I sauf peut être en quelques valeurs où elle s'annule alors f est strictement croissante sur I

(5) Si f' est strictement négative sur I sauf peut être en quelques valeurs où elle s'annule alors f est strictement décroissante sur I

<u>Exercice 4</u> : Etudier les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 4x^3 + 15x^2 - 18x + 4$

<u>Exercice 5</u> : Etudier les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{3\}$ par : $f(x) = \dfrac{4x+5}{x-3}$

IV- Extremum

Rappels de seconde :

• Soit x_0 dans I, $f(x_0)$ est le **maximum** de f sur I signifie que pour tout $x \in$ I, $f(x) \leq f(x_0)$

• Soit x_0 dans I sans être une extrémité de I, $f(x_0)$ est un **maximum local** de f sur I signifie qu'il est possible de trouver un intervalle ouvert J inclus dans I, contenant x_0 et tel que $f(x_0)$ soit le maximum de f sur J.

• Soit x_0 dans I, $f(x_0)$ est le **minimum** de f sur I signifie que pour tout $x \in$ I, $f(x) \geq f(x_0)$

• Soit x_0 dans I sans être une extrémité de I, $f(x_0)$ est un **minimum local** de f sur I signifie qu'il est possible de trouver un intervalle ouvert J inclus dans I, contenant x_0 et tel que $f(x_0)$ soit le minimum de f sur J.

• Un **extremum** est un minimum ou un maximum

• Un **extremum** local est un maximum local ou un minimum local

Dans les théorèmes ci-dessous ,

f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert J et x_0 un réel de J.

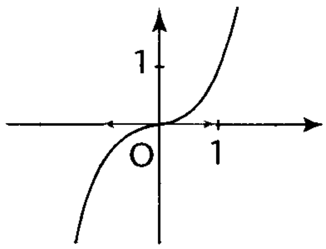
Théorème 8 (admis)

Si $f(x_0)$ est un extremum local de f alors $f'(x_0) = 0$

La réciproque est fausse : c'est-à-dire que ce n'est pas parce que $f'(x_0) = 0$ que forcément $f(x_0)$ est un extremum local.

Contre-exemple : f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $f'(x) = 3x^2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

On a donc $f'(0) = 0$ mais $f(0) = 0$ n'est pas un extremum local car on ne peut pas trouver d'intervalle ouvert contenant 0 et sur lequel 0 soit un extremum, f atteint toujours des valeurs plus grandes ou plus petites que 0



Théorème 9 (admis)

Si f' s'annule en x_0 en changeant de signe alors $f(x_0)$ est un extremum local de f

Exercice 6 : Etudier les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$ par : $f(x) = 1 - x - \dfrac{1}{x-1}$

En déduire les extremums de f.