Compte rendu de la séance n^o 2

Lors de notre séance du 08/08/07, nous avons évoqué plusieurs points importants :

➢ L'intersection de tout hyperplan H de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et de $\mathcal{G}L_n(K)$ est toujours non vide.
Sebastien a alors demandé s'il existait un sous espace vectoriel F tel que

$$F \subseteq (\mathcal{G}L_n(K) \cap H)^c = \mathcal{G}L_n(\mathbb{K})^c \cup H^c$$

Si $x \notin H$, $F = \mathrm{Vect}(x)$ convient ($0 \notin \mathcal{G}L_n(\mathbb{K})$!).

➢ Nous avons parlé de décomposition de permutation en produit de transposition. Je m'excuse (Sebastien ?) pour la formule

$$\sigma = (1\,2\,...\,n) = (1\,2)(2\,3)...(n-1\ \ n)$$

qui était tout à fait juste ! !
Nous ferons un topo dans une prochaine séance (sûrement à la prochaine leçon) sur les opérations lignes-colonnes, mais dors et déja j'ai évoqué que permutation des colonnes d'une matrice selon σ peut se voir comme la multiplication à droite par la matrice obtenue par permutation des colonnes de l'identité :

$$J_\sigma = (\delta^i_{\sigma^{-1}(j)}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \vdots & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Ali a posé la question de la décomposition de cette matrice en lien avec la décomposition de σ en produit de transposition.
Je vous laisse vérifier la formule $J_{\sigma\sigma'} = J_{\sigma'}J_\sigma$ et trouver la décompostion de la matrice ci-dessus en produit de matrice de transposition.

➢ Nous avons évoqué lors de la leçon de Jean-François l'implication $\dim(E) < +\infty \Rightarrow E = E^{**}$.
Il se trouve que la réciproque est vraie.
En effet je rappelle que l'injection est donnée par $\begin{array}{rcl} f\colon E & \longrightarrow & E^{**} \\ a & \longmapsto & f_a : f \mapsto f(a) \end{array}$
Il est facile de voir que chaque f_a est continue. Par exemple si E est un espace vectoriel normé, on a $\|f_a(f)\| = \|f(a)\| \leq \|f\|\,\|a\| = \|a\|\,\|f\|$ et donc $\|f\| \leq \|a\| < \infty$
En fait il existe toujours en dimension infinie des formes linéaires non continues, et de ce fait l'injection de E dans E^{**} est stricte.
En effet, si E est un evn de dimension infinie, on considère une base $\mathcal{B}$ de cardinal infini.
Alors on peut extraire de cette famille une sous famille $\mathcal{F} = (e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ dénombrable, que l'on peut supposer normée (quitte à remplacer e_i par $\frac{e_i}{\|e_i\|}$).
Alors on définie f par $f(e_i) = i$, et $f(x) = 0$ si $x \in \mathcal{B} \setminus \mathcal{F}$.
Alors puisque $\|f(e_i)\| = i \underset{i\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, f n'est pas continue.

➢ Pour la correction de l'exercice n° 4, il s'agissait de démontrer que si tout sous-espace de E admet un supplémentaire stable alors f est diagonalisable.

En effet si H est un hyperplan de E alors il existe une droite stable pour f, donc il existe un vecteur propre x_1 pour f, associé à la valeur propre λ_1.

Soit alors un hyperplan contenant x_1 (il en existe : pourquoi ?). De même, cet hyperplan admet un supplémentaire stable donc il existe un vecteur propre x_2 associé à la valeur propre λ_2, et par construction (x_1, x_2) fest une famille libre.

Supposons à présent construit une famille libre $(x_1, x_2, ..., x_k)$ de vecteurs propres pour $k \leq n-1$. De même il existe un hyperplan contenant $x_1, ..., x_k$ qui admet un supplémentaire $f-$stable. Il existe donc x_{k+1} vecteur propre tel que $x_1, ..., x_{k+1}$ est libre.

Par récurrence (à rédiger) on construit donc une base de E formé de vecteurs propres et f est diagonalisable $\square$