Stage « calcul formel - éléments d'analyse numérique ».

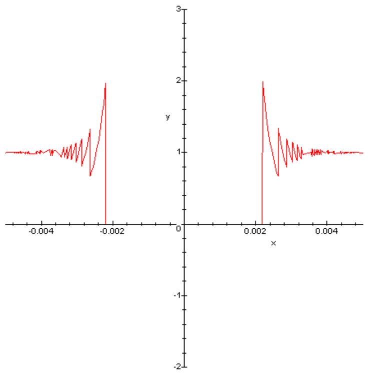
1. Généralités :

Le calcul numérique classique présente un problème majeur : la non-connaissance par la machine de nombres réels.

- ✓ $\frac{1}{3} \times 3$ ne peut jamais faire 1 (d'ailleurs c'est encore plus complexe à expliquer aux étudiants lorsque la machine affiche ….. 1), sauf en calcul symbolique.

```
> 1/3+1/3+1/3;
                                          1
> Digits:=2000:1.0/3.0+1.0/3.0+1.0/3.0;
9999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999\
  9999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999\
  9999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999\
  9999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999\
  9999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999\
  9999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999\
  9999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999\
  9999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999\
  9999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999\
  9999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999\
  9999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999\
  9999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999\
  9999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999\
  9999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999\
  9999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999\
  9999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999\
  99999
```

- ✓ Il faut bien expliquer à l'étudiant explorant $\frac{\ln(1+x^6)}{x^6}$ ayant pour limite 1 en 0 ce qui apparaît sur l'écran de sa calculatrice.




```
> f:=x->ln(1+x^6)/x^6;
```

$$f := x \rightarrow \frac{\ln(1+x^6)}{x^6}$$

```
>
> for i from 9 to 13 do  Digits:=i; f(0.01),f(0.02),f(0.03); od;
                         Digits := 9
                           0, 0, 0
                         Digits := 10
                     0, 0, 1.371742112
                         Digits := 11
               0, 1.5624999999, .96021947841
                         Digits := 12
              0, .937499999972, 1.00137174175
                         Digits := 13
       .9999999999995, .9999999999680, .9999999996355
```

- ✓ Un calcul de déterminant (matrice inversible ? colinéarité ?) ou de discriminant peut s'avérer non nul alors qu'en réalité il l'est (par exemple, que donne une calculatrice avec l'équation $x^2 - 2\sqrt{2}x + 2 = 0$?).

- ✓ Le calcul formel sait manipuler les expressions ; la plupart du temps, les résultats sont exacts (on retarde les problèmes d'arrondis).

✓ A la calculatrice, ce n'est pas toujours seulement la dernière décimale qui est fausse :

```
> Pi^(Pi^Pi)/10^20;for i from 5 to 10 do evalf(Pi^(Pi^Pi)/10^20,i) od;
>
```

$$\frac{1}{100000000000000000000}\pi^{(\pi^{\pi})}$$

$$.013416$$

$$.0133988$$

$$.01340216$$

$$.013401701$$

$$.0134016366$$

$$.01340164240$$

Nous verrons qu'il est assez facile d'utiliser un système de calcul formel comme une calculatrice « évoluée » (manipulation d'objets, calculs de dérivées…). Cependant, pour mieux exploiter cet outil puissant, de bonnes connaissances en mathématiques et une formation sont indispensables.

Les étudiants vont posséder de plus en plus des machines « formelles » ; l'enseignant pourra étoffer sa façon d'enseigner. Mais d'autre part il va être confronté à des difficultés particulières Par exemple, deux machines fourniront des résultats (en apparence) différents.

<table>
<tr>
<td>

```
> f:=x->(sin(x)-1)/(cos(x)-1);
```

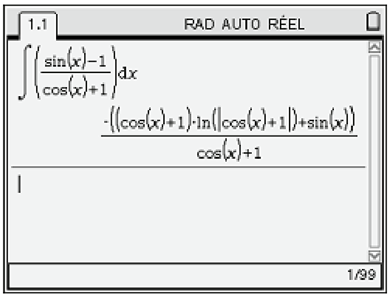
$$f := x \rightarrow \frac{\sin(x)-1}{\cos(x)-1}$$

```
> int(f(x),x);
```

$$-\frac{1}{\tan\left(\frac{1}{2}x\right)} - 2\ln\left(\tan\left(\frac{1}{2}x\right)\right) + \ln\left(1+\tan\left(\frac{1}{2}x\right)^2\right)$$

</td>
<td>

TI- Nspire



</td>
</tr>
</table>

Les problèmes de simplification d'expressions ne sont pas simples en calcul symbolique – d'ailleurs, qu'est ce qu'une expression « simple » ?). Les sujets d'examens devront dans un futur proche, tenir compte des nouvelles possibilités de calcul offertes aux étudiants.

<table>
<tr>
<td>

un étudiant cherchant à résoudre $\begin{cases} mx + y = 1 \\ x + my = 1 \end{cases}$ après affichage sur sa calculatrice prendra t-il en compte le cas m = -1 ?
Et le cas m = 1 ??

</td>
<td>

```
solve({m*x+y=1,x+m*y=1},{x,y});
```

$$\left\{x = \frac{1}{m+1}, y = \frac{1}{m+1}\right\}$$

</td>
</tr>
</table>

Maple ne sait pas faire que du calcul symbolique ; nous verrons quelques problèmes liés à l'analyse numérique.

L'analyse numérique est la mise en pratique d'algorithmes permettant la résolution de problèmes principalement liés à l'analyse (réels, complexes, algèbre linéaire, équations différentielles …). Ces problèmes possèdent parfois des solutions exactes, obtenues parfois à l'aide de calcul formel (mais si le résultat est ln(2) ou $\sqrt{3}$ encore faut-il fournir une valeur approchée de ces résultats).

- ✓ Le plus souvent des méthodes itératives sont nécessaires afin de déterminer une approximation.

- ✓ Se posent alors les problèmes de convergence.

- ✓ Des problèmes d'efficacité (rapidité des calculs) : un exemple classique est la méthode de Horner plus efficace que le rangement des polynômes par puissances décroissantes pour le calcul de valeurs.

```
readlib(cost):
P:=x^4 - 2*x^3 + x^2 - 2*x + 1;
cost(P);
factor(P,sqrt(2));
```

$$P := x^4 - 2\,x^3 + x^2 - 2\,x + 1$$

$$4\,additions + 8\,multiplications$$

$$(x^2 - x + \sqrt{2}\,x + 1)\,(x^2 - x - \sqrt{2}\,x + 1)$$

```
> convert(P,horner);
cost(");
```

$$1 + (-2 + (1 + (-2 + x)\,x)\,x)\,x$$

$$4\,additions + 3\,multiplications$$

- ✓ Pour résoudre des systèmes linéaires ou pour déterminer la plus grande valeur propre, le type de matrice (creuse, quasi diagonale, ..) peut amener des choix différents de méthodes.

- ✓ Des problèmes de codage des réels : la précision est limitée, donc le nombre de réels disponibles est nombre limité ; l'addition n'est plus associative (par exemple, avec $a = 10^{30}, b = -10^{30}, c = 1 \quad (a + b) + c = 1 \neq 0 = a + (b + c)$). Dans des sommations, selon comment les termes de la suite sont présentés, le cumul d'erreurs peut amener des résultats variables ; on retrouve ce problème dans la calcul matriciel, dans des méthodes algorithmiques de résolutions d'équations, etc…

- ✓ Des problèmes de stabilité (conditionnement : influence de la précision des conditions initiales ou propagation des erreurs lors des calculs intermédiaires).

```
> restart:Limit((1+1/x)^x, x=infinity)=limit((1+1/x)^x, x=infinity);
  Digits:=40:exp(1)=evalf(exp(1));
  n:=1000:
```

$$\lim_{x \to \infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \mathbf{e}$$

$$\mathbf{e} = 2.718281828459045235360287471352662497757$$

```
> z:=1:y:=1+1/n:
> for i from 1 to n do z:=z*y od:
> `(1+1/n)^n`=evalf(z);
```

$$(1+1/n)\text{^}n = 2.716923932235892457383088121947577188964$$

Exemple de système bien conditionné :

```
> restart:eq1:=x+y=2;eq2:=x+8*y=2;solve({eq1,eq2});
```

$$eq1 := x + y = 2$$

$$eq2 := x + 8\,y = 2$$

$$\{x = 2, y = 0\}$$

```
> eq1:=x+y=2;eq2:=x+8*y=2.00001;solve({eq1,eq2});
```

$$eq1 := x + y = 2$$

$$eq2 := x + 8\,y = 2.00001$$

$$\{y = .1428571429\ 10^{-5}, x = 1.999998571\}$$

Exemple de système mal conditionné :

```
> eq1:=x+y=2;eq2:=x+1.0001*y=2;solve({eq1,eq2});
```

$$eq1 := x + y = 2$$

$$eq2 := x + 1.0001\,y = 2$$

$$\{y = 0., x = 2.\}$$

```
> eq1:=x+y=2;eq2:=x+1.0001*y=2.0001;solve({eq1,eq2});
```

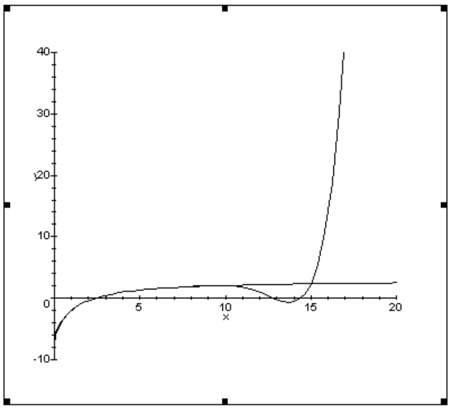
$$eq1 := x + y = 2$$

$$eq2 := x + 1.0001\,y = 2.0001$$

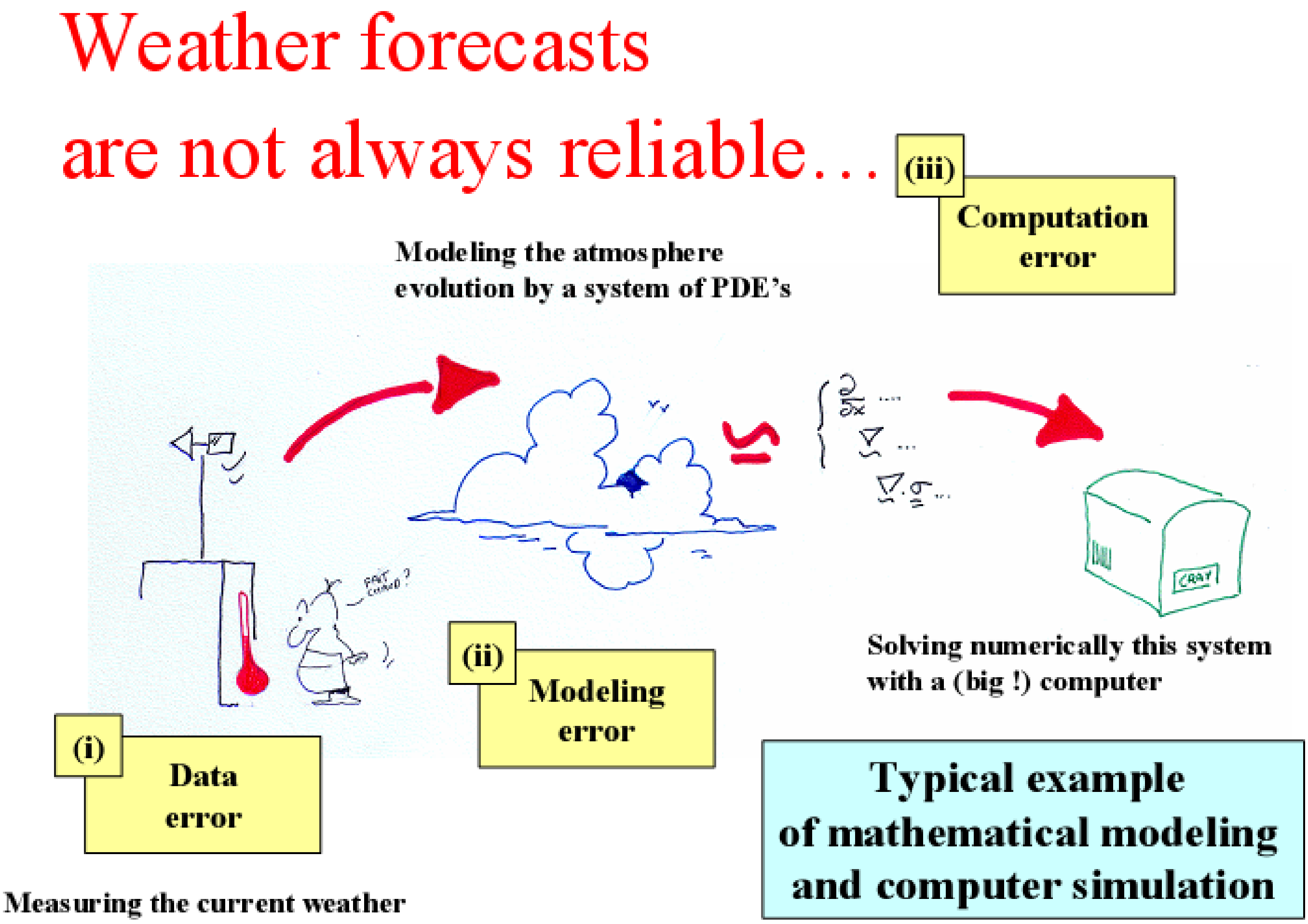
$$\{y = 1., x = 1.\}$$

- ✓ Dans un programme les égalités dans les tests posent difficultés (aussi, on écrit souvent des conditions sous la forme $|x - x'| < \varepsilon$).

- ✓ L'approximation de fonction subit le phénomène de Runge. On connaît aussi le phénomène de Gibbs pour les séries de Fourier.

l'interpolation par le polynôme de Lagrange n'est pas uniforme.	`X:=[1,2,3,5,4,7,10,15]:`
	`f:=x->3-10/(1+x);`
	$f := x \to 3 - \frac{10}{x+1}$
	`Y:=map(f,X);`
	$Y := \left[-2, \frac{-1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{4}{3}, 1, \frac{7}{4}, \frac{23}{11}, \frac{19}{8}\right]$
	`p:=interp(X,Y,x);`
	$p := \frac{1}{101376}x^7 - \frac{1}{2112}x^6 + \frac{469}{50688}x^5 - \frac{613}{6336}x^4 + \frac{20219}{33792}x^3 - \frac{14495}{6336}x^2 + \frac{15585}{2816}x - \frac{4053}{704}$
	`plot({f(x),p},x=0..20,y=-10..40,color=BLACK);`
	

✓ Les prévisions météo… ne sont pas toujours fiable, isn't ?



2. Prise en main du logiciel Maple :

- ✓ Utiliser un logiciel de calcul formel demande un certain apprentissage : autant choisir un logiciel mondialement connu (l'autre référence étant « Mathematica ») et très diffusé en classes préparatoires depuis plus de 15 ans.

- ✓ La syntaxe utilisée par les autres logiciel (Mupad, Xcas, Derive…) ou par les calculatrices formelles (TI-Nspire ..) est très inspirée de celle de Maple.

- ✓ Son interface graphique est rudimentaire, mais la partie « programmation » est un outil extrêmement intéressant

- ✓ Maple n'a pas de réelle limitation (en principe ne dépend que de la machine sur lequel le logiciel travaille)

Lors de ces séances, la prise en main de ce puissant logiciel sera faite avec de nombreux exemples exploitables au lycée et en post-bac :

- résolutions : équations, équations différentielles, suites récurentes
- polynômes (simplifications, approximations), fonctions
- différents types : entiers, complexes ; problèmes liés aux réels
- algèbre linéaire (incontournable), systèmes, valeurs propres
- programmation ; algorithmes indispensables (Newton, approximations d'intégrales, accélération.

3. Des pistes pour l'utilisation au lycée (et au collège):

- ✓ Lors d'exercices, il peut être intéressant de contrôler un développement, une factorisation, une simplification d'expression contenant des puissances, des logarithmes … Dans le chapitre des fonctions, de substituer –x ou bien x+k à x afin de déterminer un élément de symétrie, de vérifier une dérivée …. Cependant se posera la question de l'utilisation d'un tel outil (apport pédagogique ou gène dans l'apprentissage de techniques ?).

- ✓ Lors d'une activité, on peut être gêné par la technique (une équation dont on ne connaît pas la méthode de résolution, un développement ou une factorisation complexe, un calcul de dérivée ou d'intégrale difficile, une substitution de variable dans une expression, une simplification de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ …).

- ✓ Les premiers contacts des étudiants avec un logiciel de calcul formel apportent une certaine fascination. Mais les questions mathématiques ne disparaitront pas pour autant.

- ✓ Des innovations seront sans aucun doute à venir dans les situations d'apprentissage et dans les sujets d'examens.

- ✓ Il est bon de se rappeler aussi que le collégien est fortement plongé dans l'univers formel (formules de distributivité, opérations sur les fractions, les puissances, les racines…, formules d'aires, de périmètres, de volumes…). Il apprend à transformer des expressions, écrire une expression en fonction d'une variable, substituer. Il est clair que l'utilisation d'un logiciel de calcul formel doit se faire de façon homéopathique sous peine de shunter tous les processus d'apprentissages.

⊗ Autant de décimales pour Pi, ça sort de l'ordinaire et c'est souvent une révélation pour un élève de seconde ; mais comment obtient-on ces décimales ?

```
> Digits:=2000:
> evalf(Pi);
3.14159265358979323846264338327950288419716939937510582097494459230781640628620899862803482534211706798214808651328230664709384460955058\
  58223172535940812848111745028410270193852110555964462294895493038196442881097566593344612847564823378678316527120190914564856692346034\
  48610454326648213393607260249141273724587006606315588174881520920962829254091715364367892590360011330530548820466521384146951941511609\
  94330572703657595919530921861173819326117931051185480744623799627495673518857527248912279381830119491298336733624406566430860213949463\
  39522473719070217986094370277053921717629317675238467481846766940513200056812714526356082778577134275778960917363717872146844090122495\
  53430146549585371050792279689258923542019956112129021960864034418159813629774771309960518707211349999998372978049951059731732816096318\
  85950244594553469083026425223082533446850352619311881710100031378387528865875332083814206171776691473035982534904287554687311595628638\
  88235378759375195778185778053217122680661300192787661119590921642019893809525720106548586327886593615338182796823030195203530185296899\
  95773622599413891249721775283479131515574857242454150695950829533116861727855889075098381754637464939319255060400927701671139009848824\
  40128583616035637076601047101819429555961989467678374494482553797747268471040475346462080466842590694912933136770289891521047521620569\
  96602405803815019351125338243003558764024749647326391419927260426992279678235478163600934172164121992458631503028618297455570674983850\
  05494588586926995690927210797509302955321165344987202755960236480665499119881834797753566369807426542527862551818417574672890977772793\
  38000816470600161452491921732172147723501414419735685481613611573525521334757418494684385233239073941433345477624168625189835694855620\
  09921922218427255025425688767179049460165346680498862723279178608578438382796797668145410095388378636095068006422512520511739298489608\
  84128488626945604241965285022210661186306744278622039194945047123713786960956364371917287467764657573962413890865832645995813390478027\
  75901
```

⊗ Voici de jolies factorisations, mais Maple ne dispensera pas de l'étude en classe des identités remarquables.

```
> factor(x^8-1);
```

$$(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)$$

```
> factor(x^8-1,I);
```

$$(x^2+I)(-x^2+I)(-x+I)(x+I)(x-1)(x+1)$$

```
> factor(x*x-5*x+6);
```

$$(x-2)(x-3)$$

```
>
```

⊗ La forme explicite de la suite de Fibonacci donnée sous forme de récurrence linéaire

$$\begin{cases} u_0 = 0, \quad u_0 = 1 \\ u_n = u_{n-1} + u_{n-2}\,, \; pour\; n \geq 2 \end{cases}$$

```
> f:=rsolve({u(n)=u(n-1)+u(n-2),u(0)=0,u(1)=1},u); g:=unapply(f,n): g(5);
```

$$f := \frac{\left(-1+\frac{1}{5}\sqrt{5}\right)\left(-\frac{2}{-\sqrt{5}+1}\right)^n}{-\sqrt{5}+1} + \frac{\left(-1-\frac{1}{5}\sqrt{5}\right)\left(-\frac{2}{\sqrt{5}+1}\right)^n}{\sqrt{5}+1}$$

$$-32\,\frac{-1+\frac{1}{5}\sqrt{5}}{(-\sqrt{5}+1)^6} - 32\,\frac{-1-\frac{1}{5}\sqrt{5}}{(\sqrt{5}+1)^6}$$

```
> simplify(");
```

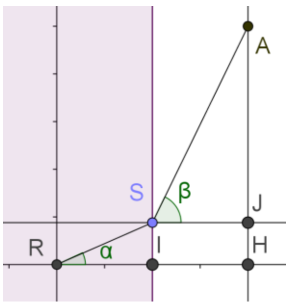
$$\frac{20480}{(\sqrt{5}-1)^6(\sqrt{5}+1)^6}$$

```
> normal(",expanded);
```

$$5$$

```
>
```

⊗ La loi de Snell-Descartes peut s'adapter au sportif étant sur un radeau de la baie des Citrons et devant rejoindre sa voiture sur terre ferme en un temps minimum



La distance Radeau-bord de mer RI=k1
La distance bord de mer-Auto = SJ = k2
La vitesse dans l'eau est V_1 et sur le sol V_2
Il s'agit de trouver le point de sortie de l'eau S tel que le trajet soit le plus court possible, autrement dit minimiser

$$\frac{k}{\cos(\alpha).V_1} + \frac{k}{\cos(\beta).V_2}$$

α et β sont liés puisque HA est constant

(inspiré J.P Roy - EPI n° 10)

```
> restart:
  t:=k1/cos(alpha)/v1+k2/cos(beta(alpha))/v2;
  z:=k1*tan(alpha)+k2*tan(beta(alpha));
```

$$t := \frac{k1}{\cos(\alpha)\,v1} + \frac{k2}{\cos(\beta(\alpha))\,v2}$$

$$z := k1\,\tan(\alpha) + k2\,\tan(\beta(\alpha))$$

```
> eq1:=diff(z,alpha)=0;
```

$$eq1 := k1\,(1+\tan(\alpha)^2) + k2\,(1+\tan(\beta(\alpha))^2)\left(\frac{\partial}{\partial\alpha}\beta(\alpha)\right) = 0$$

```
> eq2:=diff(t,alpha)=0;
```

$$eq2 := \frac{k1\,\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)^2\,v1} + \frac{k2\,\sin(\beta(\alpha))\left(\frac{\partial}{\partial\alpha}\beta(\alpha)\right)}{\cos(\beta(\alpha))^2\,v2} = 0$$

```
> eq3:=solve(eq1, diff(beta(alpha),alpha)):
> eq3:=simplify(");
```

$$eq3 := -\frac{k1\,\cos(\beta(\alpha))^2}{k2\,\cos(\alpha)^2}$$

```
> subs(diff(beta(alpha),alpha)=eq3,eq2):
> simplify(numer(lhs("))/k1);
```

$$\sin(\alpha)\,v2 - \sin(\beta(\alpha))\,v1$$

finalement on retrouve : $\frac{\sin(\beta)}{\sin(\alpha)} = \frac{v_2}{v_1}$

ou bien en posant RI = x et RH=d

```
> t:=x->sqrt(k1**2+x**2)/v1+sqrt(k2**2+(d-x)**2)/v2;
```

$$t := x \to \frac{\sqrt{k1^2+x^2}}{v1} + \frac{\sqrt{k2^2+(d-x)^2}}{v2}$$

```
> diff(t(x),x);
```

$$\frac{x}{\sqrt{k1^2+x^2}\,v1} + \frac{1}{2}\,\frac{-2\,d+2\,x}{\sqrt{k2^2+d^2-2\,d\,x+x^2}\,v2}$$

```
> subs(1/sqrt(k1**2+x**2)=sina/x,");subs(1/sqrt(k2**2+(d-x)**2)=sinb/(d-x),");
```

$$\frac{sina}{v1} + \frac{1}{2}\,\frac{-2\,d+2\,x}{\sqrt{k2^2+d^2-2\,d\,x+x^2}\,v2}$$

$$\frac{sina}{v1} + \frac{1}{2}\,\frac{sinb\,(-2\,d+2\,x)}{(d-x)\,v2}$$

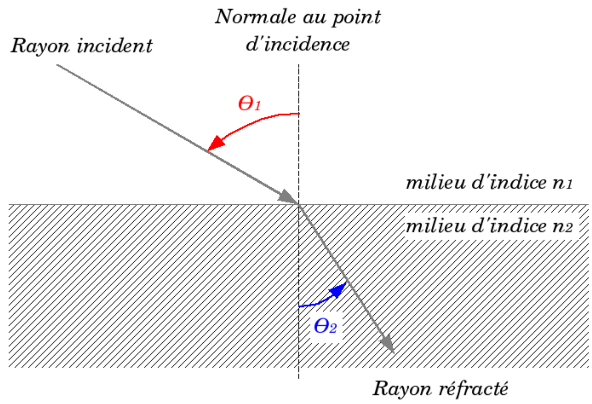
```
> simplify(");
```

$$-\frac{-sina\,v2 + sinb\,v1}{v2\,v1}$$

```
> expand(");
```

$$\frac{sina}{v1} - \frac{sinb}{v2}$$

le zéro de la dérivée … (à compléter avec le signe de t'')



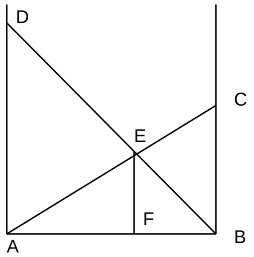
loi de Snell, version optique

⊗ Cette conjecture de Fermat « les entiers $2^{(2^n)} + 1$ sont premiers » s'est avérée fausse.

```
with (numtheory):
for i from 0 to 6
do
F(i)=ifactor(F(i))
od;
```

$$3 = (3)$$
$$5 = (5)$$
$$17 = (17)$$
$$257 = (257)$$
$$65537 = (65537)$$
$$4294967297 = (641)\,(6700417)$$
$$18446744073709551617 = (67280421310721)\,(274177)$$

⊗ Deux échelles mesurant 2 et 3m sont placées dans un couloir aux murs verticaux et au sol horizontal.

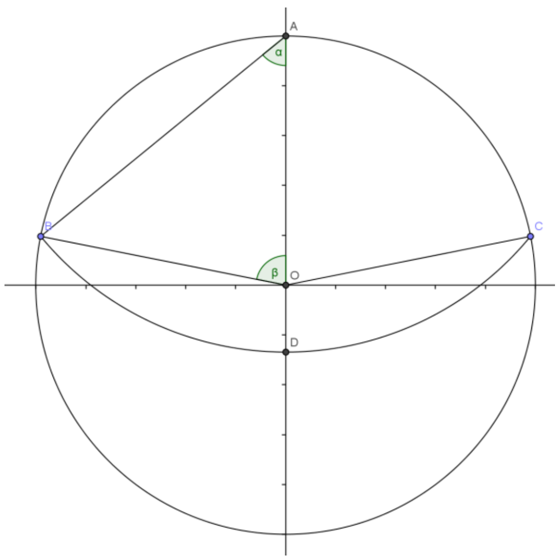


EF = 1 m. AF=y, FB=z. Quelle est la largeur x du couloir ?

```
>
> fsolve ({x=y*sqrt(4.0-x*x),x=z*sqrt(9.0-x*x),x=y+z},{x,y,z},{x=1..5});
```

$$\{x = 1.231185724,\ z = .4500403039,\ y = .7811454199\}$$

⊗ Une chèvre est attachée au bord d'un champ circulaire de rayon 1. Quelle doit être la longueur L de la corde attachée en A pour que la chèvre ne broute que la moitié du champ ?



La chèvre!

Rayon du champ de centre O: 1

longeur de la corde attachée au point A sur la circonférence : L

à l'extrémité de sa corde la chèvre coupe le cercle en B et C et le diamètre (OA) en D

OAB est isocèle les angles OAB et AOB mesurent alpha et beta

```
> restart;
  fsolve ({2*alpha+beta=Pi,sin(beta) = L*sin(alpha) , beta+L*L*alpha - sin(beta) = Pi/2},{alpha,beta,L},{beta=0.5..1.5});
```

$\{L = 1.158728473, \alpha = .9528478648, \beta = 1.235896924\}$

⊗ Ecrire une fonction f qui associe à l'entier n la somme des cubes des chiffres utilisés dans l'écriture de n en base 10.

Ecrire un programme permettant de déterminer tous les entiers n ≤ 1000 tels que f(n) = n.

```
> f:=proc (n)
  local z,s,k:
  z:=n:
  s:=0:
  k:=0;
  while (z>0)
  do    k:=irem (z,10, 'z');  s:= s + k**3;  od;
  RETURN (s);
  end:
> f(12);
```

9

```
> for j from 0 to 1000
  do
   if f(j) = j
     then print (j):
   fi:
  od;
```

0

1

153

370

371

407