Rappels sur le barycentre

Terminale S

1. Définition : Soit $\{(A_i;a_i)\}_{1\le i\le n}$, un système de n points pondérés.

Si la somme des coefficients a_i est non nulle, on appelle barycentre du système $\{(A_i;a_i)\}_{1\le i\le n}$ l'unique point G vérifiant : $\boxed{a_1\,\overrightarrow{GA_1}+a_2\,\overrightarrow{GA_2}+a_3\,\overrightarrow{GA_3}+\cdots+a_n\,\overrightarrow{GA_n}=\vec{0}}$, c'est-à-dire $\sum_{i=1}^{i=n} a_i\,\overrightarrow{GA_i}=\vec{0}$

Propriété : Si G est le barycentre du système de points pondérés $\{(A_i;a_i)\}_{1\le i\le n}$ alors on a :

$$\overrightarrow{A_1G}=\sum_{j=2}^{n}\frac{a_j}{\sum_{i=1}^{i=n}a_i}\overrightarrow{A_1A_j}$$

Remarques:

Si la somme des coefficients a_i est nulle, il n'existe pas un point G unique vérifiant l'égalité ci-dessus. Dans ce cas , la somme $\sum_{i=1}^{i=n} a_i\,\overrightarrow{MA_i}$ est un vecteur constant quelle que soit le point M.

Le barycentre ne change pas si on modifie l'ordre des points pondérés.(Commutativité de l'addition)

Le barycentre ne change pas si on multiplie tous les coefficients par un même réel non nul.

Définition: On appelle **isobarycentre** des points A_1, A_2, … , A_n, le barycentre de ces points tous affectés d'un même coefficient non nul.

Remarques : Le barycentre de deux points distincts A et B se trouve sur la droite (AB)

L'isobarycentre de deux points A et B est le milieu du segment [AB].

Le barycentre de trois points non alignés A, B et C se trouve dans le plan (ABC).

L'isobarycentre de trois points A, B, C est le centre de gravité du triangle ABC.

Exercice 1 : Soient 3 points A, B et C non alignés, Construire les barycentres (vérifier leur existence) G et H des systèmes {(A;1);(B;2);(C;3)} et {(A;-1);(B;1);(C;-1)} (méthode : utilisation directe de la propriété)

2. Propriétés

a. Associativité du barycentre

On considère un système $\{(A_i;a_i)\}_{1\le i\le n}$ avec $n \ge 3$ et $\sum_{i=1}^{i=n} a_i \ne 0$.

On suppose qu'il existe un entier p tel que $1 < p < n$ et $\sum_{i=1}^{i=p} a_i \ne 0$.

Soit G le barycentre du système $\{(A_i;a_i)\}_{1\le i\le n}$ et G_0 le barycentre du système $\{(A_i;a_i)\}_{1\le i\le p}$ alors G est le barycentre de $\{(G_0\,;\sum_{i=1}^{i=p} a_i)\,;(A_{p+1}\,;a_{p+1})\,;\cdots(A_n\,;a_n)\}$.

(On peut remplacer les p premiers points par leur barycentre partiel affecté de la somme de leurs coefficients.)

Application : reprendre l'exercice précédent par l'utilisation du th d'associativité.

b. **Réduction vectorielle** : Soit G le barycentre du système de points pondérés $\{(A_i;a_i)\}_{1\le i\le n}$ avec

$\sum_{i=1}^{i=n} a_i \neq 0$. Pour tout point M (du plan ou de l'espace) , $\sum_{i=1}^{i=n} a_i\overrightarrow{MA_i} = \left(\sum_{i=1}^{i=n} a_i\right)\overrightarrow{MG}$

En déduire les formules de coordonnées barycentriques.

Exercice 2 : 1) Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que $\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right\|=\left\|\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right\|$ où A,B,C et D sont 4 points quelconques donnés du plan.

2) même question pour $\left\|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}\right\|=12$

Exercice 3 : Le plan étant muni d'un repère, on considère les points A(2; -4) ; B(-3;1) et C(1;4). Calculer les coordonnées du barycentre G du système de points pondérés {(A;1);(B;2);(C;3)}

c. **Comment démontrer que 3 points A, B et C sont alignés** : il suffit de montrer que l'un des points est barycentre des 2 autres.

Exercice 4 : ABC est un triangle avec E le milieu de [AB], F le symétrique de A par rapport à C et G le point vérifiant $\overrightarrow{BG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$.

1) Exprimer E et F comme barycentre de deux points.
2) Vérifier que G est le barycentre de {(A ; 1) ;(B ; 1) ; (A ; -1) ; (C ; 2)}.
3) En déduire que les points E, F et G sont alignés.

d. **Comment démontrer que des droites sont concourantes** : le théorème d'associativité du barycentre permet de regrouper certains points pondérés et de montrer ainsi qu'un point G appartient à chacune des droites de l'exercice (car G barycentre de 2 points).

Exercice 5 : ABC est un triangle avec E le milieu de [AB], F le point tel que $\overrightarrow{AF}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ C et G le point vérifiant $\overrightarrow{BG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.

1) Faire une figure
2) Démontrer que les droites (CE), (BF) et (AG) sont concourantes.