BACCALAUREAT GENER
AL

Session 2006

MATHEMATI
QUES

Sé
e S

Enseig
ement de spécialité

urée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient : 9

Spécialité

Ce sujet comporte 5 pages numérotées de 1 à 5.

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants.
Le candidat doit traiter tous les exercices.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies

EXERCICE 1 (5 points)
Commun à tous les candidats

Pour tout cet exercice, l'espace est muni d'un repère orthonormal $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$.

1. *Question de cours*
   Etablir l'équation cartésienne d'un plan dont on connaît un vecteur normal $\vec{n}(a,b,c)$ et un point $M_0(x_0,y_0,z_0)$.
2. On considère les points $A(1,2,-3)$, $B(-3,1,4)$ et $C(2,6,-1)$.
   (a) Montrer que les points A, B et C déterminent un plan.
   (b) Vérifier qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est $2x-y+z+3=0$.
   (c) Soit I le point de coordonnées $(-5,9,4)$. Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite $\mathcal{D}$ passant par I et perpendiculaire au plan (ABC).
   (d) Déterminer les coordonnées du point J, intersection de la droite $\mathcal{D}$ et du plan (ABC).
   (e) En déduire la distance du point I au plan (ABC).

EXERCICE 2 (4 points)

Commun à tous les candidats

Pour chaque question une seule des quatre propositions est exacte. Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.
Une réponse exacte rapporte les points attribués à la question, une réponse inexacte enlève la moitié des points attribués à la question, l'absence de réponse est comptée 0 point.
Si le total est négatif la note est ramenée à 0.

A. Un sac contient 3 boules blanches, 4 boules noires et 1 boule rouge, indiscernables au toucher. On tire, au hasard, successivement, trois boules du sac, en remettant chaque boule tirée dans le sac avant le tirage suivant.

Question 1 : La probabilité de tirer trois boules noires est :

a) $\dfrac{\binom{4}{3}}{\binom{8}{3}}$ b) $\dfrac{9}{8}$ c) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^3$ d) $\dfrac{4\times 3\times 2}{8\times 7\times 6}$

Question 2 : Sachant que Jean a tiré 3 boules de la même couleur, la probabilité qu'il ait tiré 3 boules rouges est :

a) 0 b) $\left(\dfrac{1}{8}\right)^3$ c) $\dfrac{23}{128}$ d) $\dfrac{1}{92}$

B. Soit f la fonction définie sur $[0;1]$ par $f(x) = x + m$ où m est une constante réelle.

Question 3 : f est une densité de probabilité sur l'intervalle $[0;1]$ lorsque

a) $m = -1$ b) $m = \dfrac{1}{2}$ c) $m = e^{\frac{1}{2}}$ d) $m = e^{-1}$

C. La durée de vie en années d'un composant électronique suit une loi exponentielle de paramètre $0,2$.

Question 4 : La probabilité que ce composant électronique ait une durée de vie strictement supérieure à 5 ans est :

a) $1 - \dfrac{1}{e}$ b) $\dfrac{1}{e}$ c) $\dfrac{1}{5e}$ d) $\dfrac{1}{0,2}(e-1)$

EXERCICE 3 (5 points)

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Pour coder un message, on procède de la manière suivante : à chacune des 26 lettres de l'alphabet, on commence par associer un entier n de l'ensemble $\Omega = \{0, 1, 2, \dots, 24, 25\}$ selon le tableau ci-dessous :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

a et b étant deux entiers naturels donnés, on associe à tout entier n de Ω le reste de la division euclidienne de $(an + b)$ par 26 ; ce reste est alors associé à la lettre correspondante ;
Exemple : Pour coder la lettre P avec $a = 2$ et $b = 3$, on procède de la manière suivante :
Étape 1 : on lui associe l'entier $n = 15$
Étape 2 : le reste de la division de $2 \times 15 + 3 = 33$ par 26 est 7.
Étape 3 : on associe 7 à H. Donc P est codé par la lettre H.

1. Que dire alors du codage obtenu lorsque l'on prend $a = 0$?
2. Montrer que les lettres A et C sont codées par la même lettre lorsque l'on choisit $a = 13$.
3. *Dans toute la suite de l'exercice*, on prend $a = 5$ et $b = 2$.
   (a) On considère deux lettres de l'alphabet associées respectivement aux entiers n et p. Montrer que si $5n + 2$ et $5p + 2$ ont le même reste dans la division par 26 alors $n - p$ est un multiple de 26. En déduire que $n = p$.
   (b) Coder le mot AMI.
4. On se propose de décoder la lettre E.
   (a) Montrer que décoder la lettre E revient à déterminer l'élément n de Ω tel que $5n - 26y = 2$, où y est un entier.
   (b) On considère l'équation $5x - 26y = 2$, avec x et y entiers relatifs.
      i. Donner une solution particulière de l'équation $5x - 26y = 2$.
      ii. Résoudre alors l'équation $5x - 26y = 2$.
      iii. En déduire qu'il existe un unique couple $(x; y)$ solution de l'équation précédente, avec $0 \leqslant x \leqslant 25$.
   (c) Décoder alors la lettre E.

EXERCICE 4 (7 points)

Commun à tous les candidats

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par

$$u_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n}$$

PARTIE A

1. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{-3n - 2}{n(2n+2)(2n+1)}$$

2. En déduire le sens de variation de la suite (u_n).
3. Etablir alors que (u_n) est une suite convergente.

L'objectif de la partie B est de déterminer la valeur de la limite de la suite (u_n).

PARTIE B

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x} + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$$

1. (a) Justifier pour tout entier naturel n non nul l'encadrement :

$$\frac{1}{n+1} \leqslant \int_n^{n+1} \frac{1}{x}dx \leqslant \frac{1}{n}$$

   (b) Vérifier que

$$\int_n^{n+1} \frac{1}{x}dx = \frac{1}{n} - f(n)$$

   (c) En déduire que pour tout entier naturel n non nul,

$$0 \leqslant f(n) \leqslant \frac{1}{n(n+1)}$$

2. On considère la suite (S_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par

$$S_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots + \frac{1}{2n(2n+1)}$$

   (a) Montrer que pour tout entier naturel n non nul,

$$0 \leqslant f(n) + f(n+1) + \cdots + f(2n) \leqslant S_n$$

   (b) Déterminer les réels a et b tels que pour tout réel x distinct de -1 et de 0, on ait :

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}$$

   (c) En déduire l'égalité :

$$S_n = \frac{n+1}{n(2n+1)}$$

   (d) En utilisant les questions précédentes, déterminer alors la limite quand n tend vers $+\infty$ de

$$\sum_{k=n}^{2n} f(k) = f(n) + f(n+1) + \cdots + f(2n)$$

   (e) Vérifier que pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$f(n) + f(n+1) + \cdots + f(2n) = u_n - \ln\left(2 + \frac{1}{n}\right)$$

   (f) Déterminer la limite de la suite (u_n).