Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat STI 2D/STL ∾ Nouvelle-Calédonie 18 novembre 2013

EXERCICE 1 **5 points**

La suite (u_n) est définie pour tout entier naturel n par

$$u_{n+1} = 0,4u_n + 3 \quad \text{et} \quad u_0 = -1.$$

PARTIE A :

1. À l'aide d'un tableur, on a calculé les 11 premières valeurs de u_n.
On obtient les résultats suivants :

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	Valeur de n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	Valeur de u_n	−1	2,6	4,04	4,616	4,8464	4,9386	4,9754	4,9902	4,9961	4,9984	4,9994

Parmi les quatre formules ci-dessous, laquelle a-t-on entrée dans la cellule C2 pour obtenir par copie vers la droite les valeurs affichées dans les cellules D2 à L2 (on indiquera la réponse sur la copie sans justification) ?

a. $= 0,4^n + 3$ **b.** $= \$B\$2 * 0,4 + 3$ **c.** $= B2 * 0,4 + 3$ **d.** $= 0,4\hat{}C1 + 3$

2. Quelle conjecture peut-on faire sur la limite de la suite (u_n) ?
3. On considère l'algorithme suivant :

Variables :	p et n sont des entiers naturels, u est un nombre réel
Entrée :	saisir la valeur de p
Initialisation :	n prend la valeur 0, u prend la valeur -1
Traitement :	tant que $\lvert u-5\rvert > 10^{-p}$
	n prend la valeur $n+1$
	u prend la valeur $0,4u+3$
	fin tant que
Sortie :	afficher la valeur de n

À l'aide du tableau de la question 1, donner la valeur affichée par cet algorithme lorsque $p = 2$.

PARTIE B :

On étudie maintenant la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par
$v_n = 6 \times (0,4)^n$.

1. Donner la nature de la suite (v_n) et ses éléments caractéristiques.
2. Déterminer la limite de (v_n) quand n tend vers $+\infty$.
3. On admet que pour tout entier naturel n : $u_n = 5 - v_n$. Déterminer la limite de (u_n).
4. **a.** Déterminer en fonction de n la somme $v_0 + v_1 + \ldots + v_n$.
   b. En déduire en fonction de n la somme $u_0 + u_1 + \ldots + u_n$.

EXERCICE 2 **3 points**

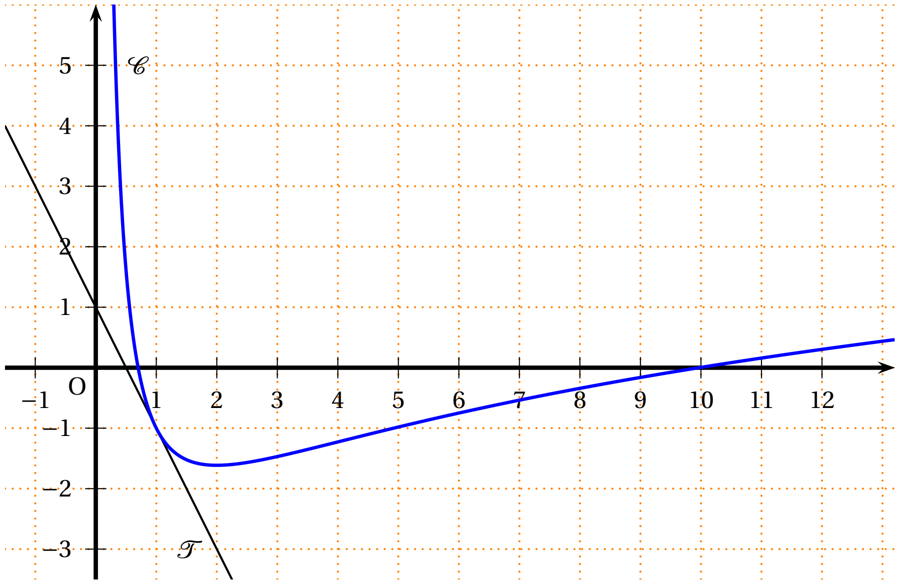
Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chaque question, une seule réponse est correcte.
$\mathbb{R}$ *désigne l'ensemble des nombres réels.*
Toute bonne réponse rapporte 0,5 *point. Une réponse erronée ou l'absence de réponse n'enlève ni ne rapporte aucun point. Aucune justification n'est demandée.*
Le candidat notera le numéro de la question et la lettre correspondante à la réponse choisie sur sa copie.

		Réponse a	Réponse b	Réponse c
1	Soit $z = -\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$. Alors son module est :	$\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	2
2	Soit $z = -\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$. Alors un argument est :	$\dfrac{\pi}{4}$	$-\dfrac{\pi}{4}$	$-\dfrac{3\pi}{4}$
3	f est définie par : $f(t) = 3\cos\left(5t - \dfrac{\pi}{2}\right)$ f est solution de :	$y' + 3y = 0$	$y'' + 25y = 0$	$y'' - 5y = 0$
4	Les solutions de l'équation $y' - 2y = 0$ sont les fonctions du type :	$x \longmapsto k\mathrm{e}^{2x}$ avec $k \in \mathbb{R}$	$x \longmapsto k\mathrm{e}^{-2x}$ avec $k \in \mathbb{R}$	$x \longmapsto k\mathrm{e}^{2x} + k$ avec $k \in \mathbb{R}$
5	La solution de l'équation $\ln(x+1) = 3$ est :	$\left\{1 - \mathrm{e}^3\right\}$	$\left\{1 + \mathrm{e}^3\right\}$	$\left\{\mathrm{e}^3 - 1\right\}$
6	L'ensemble des solutions de l'inéquation $2^x - 3 \leqslant 5$ est :	$]-\infty\,;\,\ln 8]$	$]-\infty\,;\,3]$	$]-\ln 3\,;\,\ln 5]$

EXERCICE 3 **7 points**

PARTIE A :

f est une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
f' désigne la fonction dérivée de f.



$\mathscr{C}$ est la représentation graphique de la fonction f dans un repère orthonormal.
$\mathscr{T}$ est la tangente à $\mathscr{C}$ au point de coordonnées $(1~;~-1)$.
$\mathscr{T}$ passe par le point de coordonnées $(0~;~1)$.

1. **a.** Par lecture graphique, déterminer $f(1)$.
   b. Déterminer $f'(1)$.
   c. Donner une équation de $\mathscr{T}$.
2. On sait que $f(x)$ est de la forme $f(x) = 2\ln x + \dfrac{a}{x} + b$ où a et b sont des nombres réels.
   a. Calculer $f'(x)$.
   b. Déterminer alors les valeurs de a et b.

PARTIE B :

Soit la fonction f définie et dérivable sur $]0~;~+\infty[$ par

$$f(x) = 2\ln x + \frac{4}{x} - 5.$$

1. **a.** Déterminer $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x)$.
   b. On admet que $\displaystyle\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty$. Que peut-on en déduire graphiquement ?
2. **a.** Pour tout nombre réel x appartenant à $]0~;~+\infty[$, vérifier que

$$f'(x) = \frac{2x - 4}{x^2}.$$

   b. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $]0~;~+\infty[$.
3. Établir le tableau de variations de f sur $]0~;~+\infty[$.
4. En précisant votre démarche, donner le nombre de solution(s) de l'équation $f(x) = 0$, pour x appartenant à $]0~;~+\infty[$.
5. **a.** Donner le signe de $f(x)$ pour x appartenant à $[1~;~3]$.
   b. On admet que la fonction F définie pour x appartenant à $]0~;~+\infty[$ par

$$F(x) = (2x + 4)\ln x - 7x$$

est une primitive de f.

Déterminer l'aire $\mathscr{A}$ du domaine limité par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 3$ en unités d'aires.

On donnera la valeur exacte puis une valeur approchée à 10^{-2} près de $\mathscr{A}$.

EXERCICE 4 **5 points**

Une entreprise fabrique en grande quantité des médailles circulaires en argent. Un contrôle de qualité consiste à vérifier que le diamètre et l'épaisseur (exprimés en millimètres) sont conformes afin de les ranger dans un étui spécifique.
Dans cet exercice, les valeurs approchées seront arrondies à 10^{-3} près.

PARTIE A :

On suppose dans cette partie que la probabilité pour qu'une pièce prélevée au hasard soit conforme est égale à $0,9$.
Soit X la variable aléatoire, qui à tout échantillon de 10 pièces associe le nombre de pièces conformes.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.
2. Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ et l'écart type $\sigma(X)$ de la variable aléatoire X.
3. Calculer la probabilité que dans un échantillon de 10 pièces, au moins 8 pièces soient conformes.

PARTIE B :

Les pièces sont fabriquées par une machine automatique. Soit M la variable aléatoire qui à chaque pièce prélevée au hasard associe son diamètre.
On suppose que M suit la loi normale d'espérance 80 et d'écart type $0,6$.

1. Déterminer la probabilité $P(79 \leqslant M \leqslant 81)$.
2. Quelle est la probabilité que le diamètre d'une pièce prélevée au hasard soit supérieur à 80 ?

PARTIE C :

On s'intéresse dans cette partie à l'épaisseur des médailles.
On fait l'hypothèse que le réglage de la machine est tel que 5 % des médailles fabriquées ont une épaisseur non conforme.

1. Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique à 95 % de la fréquence des médailles non conformes obtenues dans un échantillon de 300 médailles.
2. On prélève un échantillon de 300 médailles.

   On constate que dans cet échantillon, 24 médailles ont une épaisseur non conforme.

   Doit-on réviser le réglage de la machine ?