Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat S Nouvelle-Calédonie ∾ 15 novembre 2010

EXERCICE 1 **7 points**

Commun à tous les candidats

PARTIE A : restitution organisée de connaissances

On suppose connus les résultats suivants :
Soient u et v deux fonctions continues sur un intervalle $[a~;~b]$ avec $a < b$

- ⋆ si pour tout $x \in [a~;~b]$ $\quad u(x) \geqslant 0$ alors $\displaystyle\int_a^b u(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$
- ⋆ $\displaystyle\int_a^b [u(x) + v(x)]\,\mathrm{d}x = \int_a^b u(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b v(x)\,\mathrm{d}x$
- ⋆ $\displaystyle\int_a^b \alpha u(x)\,\mathrm{d}x = \alpha\int_a^b u(x)\,\mathrm{d}x$ où α est un nombre réel.

Démontrer que si f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle $[a~;~b]$ avec $a < b$ et si pour tout x de $[a~;~b]$, $f(x) \leqslant g(x)$ alors :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

PARTIE B :

Soit φ la fonction définie sur l'intervalle $[1~;~+\infty[$ par

$$\varphi(x) = 1 + x^2 - 2x^2 \ln x.$$

1. **a.** Étudier le sens de variation de la fonction φ sur l'intervalle $[1~;~+\infty[$.

   b. Calculer $\varphi(\mathrm{e})$. Démontrer que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[1~;~\mathrm{e}]$. Déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-1}.

   c. Déterminer le signe de $\varphi(x)$ suivant les valeurs de x.

2. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[1~;~+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{\ln x}{1 + x^2}.$$

   On note f' la fonction dérivée de f.

   a. Calculer $f'(x)$ et montrer que pour tout $x \geqslant 1$ on a : $f'(x) = \dfrac{\varphi(x)}{x\left(1 + x^2\right)^2}$.

   b. Déduire de la question 1. le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[1~;~+\infty[$.

   c. Démontrer que pour tout x appartenant à l'intervalle $[1~;~+\infty[$ on a :

$$0 \leqslant f(x) \leqslant \frac{\ln x}{x^2}.$$

   d. En déduire $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

3. **a.** À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x = 1 - \frac{2}{\mathrm{e}}$.

b. On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f, dans un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 1 cm.

Soit $\mathscr{A}$ l'aire exprimée en cm^2 du domaine compris entre la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = \text{e}$.

Déterminer un encadrement de $\mathscr{A}$.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ d'unité graphique 2 cm.
On considère les points A, B et C d'affixes respectives

$$z_{\text{A}} = -2\text{i}, \quad z_{\text{B}} = -\sqrt{3} + \text{i} \text{ et } z_{\text{C}} = \sqrt{3} + \text{i}.$$

1. **a.** Écrire z_{A}, z_{B} et z_{C} sous forme exponentielle.

   b. En déduire le centre et le rayon du cercle Γ passant par les points A, B et C.

   c. Faire une figure et placer le point A, tracer le cercle Γ puis placer les points B et C.

2. **a.** Écrire le quotient $\dfrac{z_{\text{B}} - z_{\text{A}}}{z_{\text{C}} - z_{\text{A}}}$ sous forme algébrique puis sous forme exponentielle.

   b. En déduire la nature du triangle ABC .

3. On note r la rotation de centre A et d'angle mesurant $\dfrac{\pi}{3}$ radians.

   a. Montrer que le point O$'$, image de O par r, a pour affixe $-\sqrt{3} - \text{i}$.

   b. Démontrer que les points C et O$'$ sont diamétralement opposés sur le cercle Γ.

   c. Tracer l'image Γ' du cercle Γ par la rotation r.

   d. Justifier que les cercles Γ et Γ' se coupent en A et B.

4. **a.** Déterminer l'ensemble (E) des points M d'affixe z tels que

   $$|z| = \left|z + \sqrt{3} + \text{i}\right|.$$

   b. Montrer que les points A et B appartiennent à (E).

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
On considère la similitude indirecte f d'écriture complexe

$$z' = \left(1 + \text{i}\sqrt{3}\right)\overline{z}$$

où $\overline{z}$ désigne le conjugué de z.
Soient les points A et B d'affixes respectives $z_{\text{A}} = \sqrt{6} + \text{i}\sqrt{2}$ et $z_{\text{B}} = -\sqrt{2} + \text{i}\sqrt{6}$.
On note A$'$ et B$'$ les images respectives des points A et B par f.

Une figure fournie en ANNEXE du sujet, sera complétée et rendue avec la copie. Les différentes constructions seront faites à la règle et au compas, et les traits de construction devront apparaître clairement.

1. **a.** Écrire les affixes des points A et B sous forme exponentielle.
   b. Montrer que le triangle OAB est rectangle isocèle direct.
   c. En déduire la nature du triangle OA′B′.
   d. Montrer que l'affixe $z_{\text{A}'}$ de A′ vérifie l'égalité : $z_{\text{A}'} = 2z_{\text{A}}$.
   En déduire la construction de A′ et B′.
2. On note r la rotation de centre O et d'angle de mesure $\dfrac{\pi}{3}$, et s la symétrie orthogonale d'axe $\left(\text{O}\,;\,\vec{u}\right)$. On pose $g = r \circ s$.
   a. Déterminer l'écriture complexe de la transformation g.
   b. Montrer que les points O et A sont invariants par g.
   c. En déduire la nature de la transformation g.
3. **a.** Montrer que l'on peut écrire $f = h \circ g$, où h est une homothétie de centre et de rapport à déterminer.
   b. Sur la figure placée en **ANNEXE**, un point C est placé. Faire la construction de l'image C′ de C par la transformation f.

EXERCICE 3 **4 points**
Commun à tous les candidats

Une urne contient cinq boules indiscernables au toucher : deux vertes et trois rouges.

Les questions 1. et 2. sont indépendantes

1. On extrait simultanément et au hasard deux boules de l'urne.
   On note X la variable aléatoire égale au nombre de boules vertes figurant dans le tirage.
   a. Vérifier que $P(X = 0) = \dfrac{3}{10}$ puis déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.
   b. Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X.
   c. Calculer la probabilité de l'évènement suivant :
   A : « les deux boules tirées sont de même couleur ».
2. On effectue deux tirages successifs d'une boule en respectant la règle suivante :
   si la boule tirée est rouge, on la remet dans l'urne ; si elle est verte, on ne la remet pas.

   a. En utilisant un arbre pondéré, calculer la probabilité des évènements suivants :

   B : « seule la première boule tirée est verte »,

   C : « une seule des deux boules tirées est verte ».

   b. Sachant que l'on a tiré exactement une boule verte, quelle est la probabilité que cette boule verte soit la première tirée ?

EXERCICE 4 **4 points**
Commun à tous les candidats

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$.

L'objectif de cet exercice est de déterminer la position relative d'objets de l'espace

$\mathscr{P}$ est le plan passant par A(3 ; 1 ; 2) et de vecteur normal $\vec{n}\,(1\ ;\ -4\ ;\ 1)$;

$\mathscr{D}$ est la droite passant par B(1 ; 4 ; 2) de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ (1 ; 1 ; 3).

$\mathscr{S}$ est la sphère de centre Ω(1 ; 9 ; 0) passant par A.

1. Intersection du plan $\mathscr{P}$ et de la droite $\mathscr{D}$.

  a. Démontrer que le plan $\mathscr{P}$ a pour équation cartésienne : $x-4y+z-1=0$.

  b. Montrer que la droite $\mathscr{D}$ est strictement parallèle au plan $\mathscr{P}$.

2. Intersection du plan $\mathscr{P}$ et de la sphère $\mathscr{S}$.

  a. Calculer la distance d du point Ω au plan $\mathscr{P}$.

  b. Calculer le rayon de la sphère $\mathscr{S}$. En déduire l'intersection du plan $\mathscr{P}$ et de la sphère $\mathscr{S}$.

3. Intersection de la droite $\mathscr{D}$ et de la sphère $\mathscr{S}$.

  a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite $\mathscr{D}$.

  b. Déterminer une équation cartésienne de la sphère $\mathscr{S}$.

  c. En déduire que la droite $\mathscr{D}$ coupe la sphère $\mathscr{S}$ en deux points M et N distincts dont on ne cherchera pas à déterminer les coordonnées.

ANNEXE

EXERCICE 2

Candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité

À rendre avec la copie