# NOMBRES COMPLEXES

## Le Découvreur ! (Renaissance Italie, XVIème Siècle)

*Le point de départ est un problème bête à pleurer ! : « Trouvez 2 nombres m et n dont la somme est 10 et le produit est 40 »*
*Le découvreur hausse les épaules et écrit :*

$$S = m+n = 10$$
$$P = m.n = 40$$

Tiens, se dit-il, se souvenant de cette bonne vieille équation du 2nd degré, voyons si celle-ci fait avancer les choses : Deux nombres réels dont la somme est S et le produit est P sont, s'ils existent ..., les solutions d'une équation du second degré :

$$X^2 - SX + P = 0$$

On connaît S, on connaît P, remplaçons : $X^2 - 10X + 40 = 0$, alors $\Delta = 10^2 - 4 \times 10 \times 1 = -60$

Aie ! C'est une impasse ! L'équation n'a pas de solution dans IR...
Pourtant, pense t-il, ces 2 nombres doivent bien exister puisque nous connaissons leur somme et leur produit...
Que faire ?
Or tout l'art du découvreur est là, il lui faut contourner l'obstacle :
Regardons- se dit-il- d'un peu plus prés cette somme $S = m + n = 10$ :
Et posons $m = 5+x$ et $n = 5-x$ , on a bien $m + n = 10$

Nous n'avons plus maintenant qu'une seule inconnue : x
Et une seule équation ! $P = m . n = 40$ , soit en remplaçant : $(5+x)(5-x) = 40$
et en développant : $25 - x^2 = 40$
D'où : $x^2 = -15$
Aie ! A nouveau, on tombe dans une impasse, ou un monstre !
Qui a jamais vu un carré négatif ? Personne ! On nage dans l'absurde !
Le découvreur est découragé...
A moins que ...Mais non ! Cela ne mènera à rien...Tant Pis- se dit-il – essayons quand même :
Qui nous empêche d'écrire :

$$x^2 = -1 \times 15 \ , \ \sqrt{x^2} = \sqrt{-1 \times 15} = \sqrt{-1} \times \sqrt{15} \quad \text{d'où} \quad x = \pm\sqrt{-1} \times \sqrt{15}$$

Horreur ! Encore une racine de nombre négatif !
Eh bien, puisqu'il en est ainsi, continuons dans ce monde nouveau où les monstres sont des racines carrées de nombres négatifs. Nous verrons bien ! On obtient alors :

$$m = 5 + \sqrt{-1} \times \sqrt{15}$$
$$n = 5 - \sqrt{-1} \times \sqrt{15}$$

On a bien $S = 10$ . On s'y attendait !
Est-ce que par hasard ! ! ! Calculons leur produit P

$$P = (5 + \sqrt{-1} \times \sqrt{15})\,(5 - \sqrt{-1} \times \sqrt{15}) = 25 - (\sqrt{-1} \times \sqrt{15})^2 = 25 - (-1) \times 15 = 25 + 15 = 40$$

Mais oui ! Foi de découvreur ! P = 40

Ces nombres existeraient donc bien, mais ce sont des nombres alors bien « bizarres ! » , qui n'ont rien de réel !
Notre découvreur à la fois effaré et tout émoustillé s'enhardit et décide de noter $i$ le radical de –1 :

$$i = \sqrt{-1} \;;\; i \text{ comme imaginaire.}$$

On a donc : $i^2 = -1$

Et on peut alors écrire : $m = 5 + i\sqrt{15}$ et $n = 5 - i\sqrt{15}$

Abandonnons notre découvreur à ces .. découvertes et examinons quant-à nous ces nouveaux nombres, ils ont donc deux faces :

- partie humaine le 5 c'est ce qu'on appellera plus tard, **la partie réelle** ,et
- **partie imaginaire**, c'est : $\sqrt{15}$ , ce nom lui restera.. ;

Ce nouvel ensemble de nombres sera appelé **ensemble des nombres complexes** et noté £ **.**
Un nombre complexe est en général noté **z.**
**Tout nombre complexe va donc s'écrire sous la forme : $z = a + ib$ , où a et b sont des réel s ;**
**et *i* est le nombre tel que : $i^2 = -1$**

**a est donc sa partie réelle et b sa partie imaginaire.**

*Ces nombres ont été découverts par Bombelli et Cardan mathématiciens italiens du XVI éme s et ont eu beaucoup de mal à être acceptés à leur époque.*
*L'histoire ne s'arrête pourtant pas là : au XVII éme s. Argand réussit à leur donner un statut véritable.*

Essayons nous aussi de leur donner un statut dans notre ancien monde :
Les réels, on les connaît bien, c'est un monde en forme de droite, où tous les nombres se posent les uns derrière les autres dans l'ordre, telles les hirondelles sur un fil.

Si on ne peut pas placer ces nouveaux êtres à 2 dimensions sur la droite, on peut cependant y placer leur partie réelle !
Que faire alors de leur partie imaginaire qui est aussi un réel ? Il faudrait la situer sur un second axe.
Tiens cela nous rappelle quelque chose ! Le plan, mais oui !
On peut donc identifier l'ensemble des nombres complexes au plan en décidant que chaque nombre complexe $z = a+ib$ sera représenté par le point M de coordonnées (a,b).