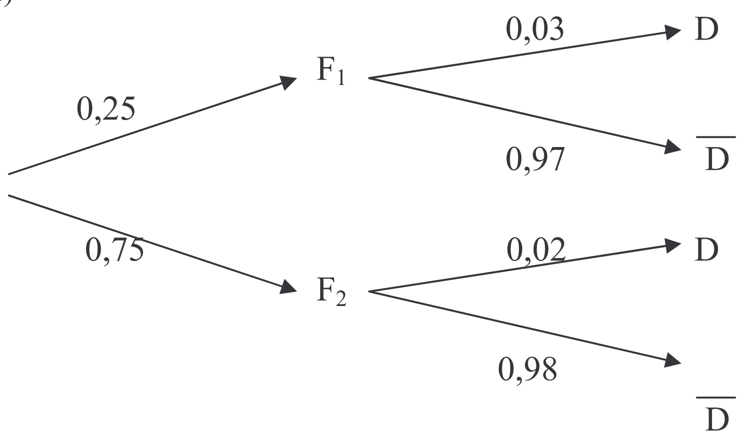
Correction du BAC S 2007 Nouvelle Calédonie

EXERCICE 1

1. c) 2. c) 3. b) 4. b) 5. c) 6. c) 7. a) 8. c)

EXERCICE 2

1. (a)



(b) $p(\mathrm{D} \cap \mathrm{F_1}) = p(\mathrm{F_1}) \times p_{\mathrm{F_1}}(\mathrm{D}) = 0{,}25 \times 0{,}03 = 7{,}5 \times 10^{-3}$

$p(\mathrm{D}) = p(\mathrm{D} \cap \mathrm{F_1}) + p(\mathrm{D} \cap \mathrm{F_2}) = 7{,}5 \times 10^{-3} + 0{,}75 \times 0{,}02 = 0{,}022\,5$

(c) $p_{\mathrm{D}}(\mathrm{F_1}) = \dfrac{p(\mathrm{D} \cap \mathrm{F_1})}{p(\mathrm{D})} = \dfrac{7{,}5 \times 10^{-3}}{0{,}022\,5} = \dfrac{1}{3}$

2. Il s'agit d'un schéma de Bernoulli. Une même expérience est répétée 20 fois. Le succès est « la pièce est défectueuse » avec pour probabilité $p(\mathrm{D})$. La variable aléatoire Y (nombre de succès obtenus) suit une loi binomiale $\mathcal{B}(20 ; 0{,}0225)$ d'où $p(\mathrm{Y} = k) = \dbinom{20}{k}(0{,}0225)^{k}(1 - 0{,}0225)^{20-k}$.

$p(\mathrm{Y} \geq 2) = 1 - p(\mathrm{Y} < 2) = 1 - [\,p(\mathrm{Y} = 0) + p(\mathrm{Y} = 1)\,]$

$p(\mathrm{Y} = 0) = \dbinom{20}{0}(0{,}0225)^{0}(0{,}9775)^{20} = (0{,}9775)^{20} \approx 0{,}634$

$p(\mathrm{Y} = 1) = \dbinom{20}{1}(0{,}0225)^{1}(0{,}9775)^{19} = 20 \times 0{,}0225 \times (0{,}9775)^{19} \approx 0{,}292$

$p(\mathrm{Y} \geq 2) \approx 0{,}074$

3. (a) X suit une loi exponentielle de paramètre λ donc $p(\mathrm{X} > 5) = 1 - p(\mathrm{X} \leq 5)$ avec

$p(\mathrm{X} \leq 5) = \int_0^5 \lambda\, e^{-\lambda x}\,dx = [-e^{-\lambda x}]_0^5 = 1 - e^{-5\lambda}$ d'où $p(\mathrm{X} > 5) = e^{-5\lambda}$

$p(\mathrm{X} > 5) = 0{,}325 \Leftrightarrow e^{-5\lambda} = 0{,}325 \Leftrightarrow -5\lambda = \ln 0{,}325 \Leftrightarrow \lambda = -\dfrac{\ln 0{,}325}{5}$ ($\approx 0{,}225$)

(b) $p(\mathrm{X} \leq 8) = 1 - e^{-8\lambda} = 1 - e^{-8 \times 0{,}225} \approx 0{,}835$

$p(\mathrm{X} > 8) = 1 - p(\mathrm{X} \leq 8) \approx 0{,}165$

(c) $p(\mathrm{X} > 8 \,/\, \mathrm{X} > 3) = p(\mathrm{X} > 5)$ car X suit une loi de durée de vie sans vieillissement

$p(\mathrm{X} > 8 \,/\, \mathrm{X} > 3) = 0{,}325$

EXERCICE 3

Partie A : dans votre cours !

Partie B $f(x) = \mathrm{e}^{x} - x - 1$ $D_f = \mathbb{R}$

1. (T) : $y = f'(a)(x - a) + f(a)$ $(a \in \mathbb{R})$
   $f'(x) = \mathrm{e}^{x} - 1$
   (T) : $y = (\mathrm{e}^{a} - 1)(x - a) + (\mathrm{e}^{a} - a - 1) = (\mathrm{e}^{a} - 1)x - a(\mathrm{e}^{a} - 1) + (\mathrm{e}^{a} - a - 1)$
   $= (\mathrm{e}^{a} - 1)x - a\,\mathrm{e}^{a} + a + \mathrm{e}^{a} - a - 1$
   (T) : $y = (\mathrm{e}^{a} - 1)x - a\,\mathrm{e}^{a} + \mathrm{e}^{a} - 1$
2. (D) : $y = -x - 1$
   (T) et (D) se coupent en un point N d'abscisse b d'où :
   $(\mathrm{e}^{a} - 1)b - a\,\mathrm{e}^{a} + \mathrm{e}^{a} - 1 = -b - 1 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{a}b - b - a\,\mathrm{e}^{a} + \mathrm{e}^{a} - 1 = -b - 1$
   $\Leftrightarrow \mathrm{e}^{a}(b - a + 1) - b - 1 = -b - 1$
   $\Leftrightarrow \mathrm{e}^{a}(b - a + 1) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{a} = 0$ ou $b - a + 1 = 0$
   $\mathrm{e}^{a} = 0$ est impossible donc $b - a = -1$
3. Construction de la tangente (T) à (C) au point M d'abscisse 1,5 :
   $a = 1{,}5$ donc $b = 0{,}5$
   On place le point M de (C) d'abscisse 1,5 et le point N de (D) d'abscisse 0,5 puis on trace la droite (MN).

Partie C

1. (C) se situe au-dessus de l'axe des abscisses donc $f \geq 0$ sur $\mathbb{R}$.
2. On en déduit que, pour tout réel x, $\mathrm{e}^{x} - x - 1 \geq 0$ soit $\mathrm{e}^{x} \geq x + 1$
   En particulier pour $x = \dfrac{1}{n}$ avec n un entier naturel non nul, on a : $\mathrm{e}^{1/n} \geq \dfrac{1}{n} + 1$ (1)
   En particulier pour $x = -\dfrac{1}{n+1}$ avec n un entier naturel non nul, on a : $\mathrm{e}^{-1/(n+1)} \geq 1 - \dfrac{1}{n+1}$ (2)
3. Pou tout entier naturel n non nul, on a :
   $\mathrm{e}^{1/n} \geq \dfrac{1}{n} + 1 \Leftrightarrow (\mathrm{e}^{1/n})^{n} \geq (\dfrac{1}{n} + 1)^{n}$ car la fonction puissance n-ième est croissante sur $\mathbb{R}^{+}$
   $\Leftrightarrow \mathrm{e} \geq (\dfrac{1}{n} + 1)^{n}$
   soit $(1 + \dfrac{1}{n})^{n} \leq \mathrm{e}$
4. Pou tout entier naturel n non nul, on a :
   $\mathrm{e}^{-1/(n+1)} \geq 1 - \dfrac{1}{n+1} \Leftrightarrow \mathrm{e}^{-1/(n+1)} \geq \dfrac{n+1-1}{n+1}$
   $\Leftrightarrow \mathrm{e}^{-1/(n+1)} \geq \dfrac{n}{n+1} \Leftrightarrow (\mathrm{e}^{-1/(n+1)})^{n+1} \geq (\dfrac{n}{n+1})^{n+1}$ car la fonction puissance n-ième est croissante sur $\mathbb{R}^{+}$
   $\Leftrightarrow \mathrm{e}^{-1} \geq (\dfrac{n}{n+1})^{n+1} \Leftrightarrow \dfrac{1}{\mathrm{e}} \geq (\dfrac{n}{n+1})^{n+1}$
   $\Leftrightarrow \mathrm{e} \leq (\dfrac{n+1}{n})^{n+1}$ car la fonction inverse est décroissante sur $]\,0\,;+\infty\,[$
   soit $\mathrm{e} \leq (1 + \dfrac{1}{n})^{n+1}$
5. D'après les questions 3. et 4., on en déduit que, pour tout naturel n non nul,
   $(1 + \dfrac{1}{n})^{n} \leq \mathrm{e} \leq (1 + \dfrac{1}{n})^{n+1}$
   Posons $u_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n}$ pour $n \geq 1$

on a $u_n \le e \le (1+\frac{1}{n})^{n+1}$

$$0 \le e - u_n \le (1+\frac{1}{n})^{n+1} - u_n$$

$$0 \le e - u_n \le (1+\frac{1}{n})^{n+1} - (\frac{1}{n}+1)^n$$

$$0 \le e - u_n \le (1+\frac{1}{n})^n [(\frac{1}{n}+1) - 1]$$

$$0 \le e - u_n \le (1+\frac{1}{n})^n \times \frac{1}{n}$$

or $(\frac{1}{n}+1)^n \le$ e d'après 3.

$$0 \le e - u_n \le \frac{e}{n} \Leftrightarrow -e \le -u_n \le \frac{e}{n} - e \Leftrightarrow e - \frac{e}{n} \le u_n \le e$$

pour tout naturel $n \ge 1$, $e(1-\frac{1}{n}) \le \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \le e$

On a, de plus, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} e(1-\frac{1}{n}) = e$ et, d'après le théorème des gendarmes,

$\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$.

EXERCICE 4

1. (a) H est le projeté orthogonal de O sur le plan (ABC) donc (OH) $\perp$ (ABC) et (OH) $\perp$ (BC).
   $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OA} \cdot (\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OC}) = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC}$
   or les triangles OAB et OCA sont rectangles en O donc $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{BO} = 0$ et $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = 0$
   d'où $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ et (OA) $\perp$ (BC).
   (b) $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OH}) \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ d'après (a) ainsi (AH) $\perp$ (BC).
   (c) (AH) $\perp$ (BC) donc la droite (AH) est une hauteur du triangle ABC
   (BH) $\perp$ (AC) donc la droite (BH) est une hauteur du triangle ABC
   Les hauteurs (AH) et (BH) se coupent en H donc H est l'orthocentre de ABC.
2. (a) Le plan (ABC) a une équation de la forme $ax + by + cz + d = 0$
   A(1 ; 0 ; 0) $\in$ (ABC) $\Leftrightarrow$ $a + d = 0$
   B(0 ; 2 ; 0) $\in$ (ABC) $\Leftrightarrow$ $2b + d = 0$
   C(0 ; 0 ; 3) $\in$ (ABC) $\Leftrightarrow$ $3c + d = 0$
   On cherche a, b et c en supposant connu d : on résout $\begin{cases} a = -d \\ b = -\frac{d}{2} \\ c = -\frac{d}{3} \end{cases}$ on choisit $d = -6$
   donc $a = 6$, $b = 3$ et $c = 2$ d'où (ABC) : $6x + 3y + 2z - 6 = 0$.
   (b) Soit M(x ; y ; z) un point de la droit D passant par O et orthogonale à (ABC).
   $\overrightarrow{n}$(6 ; 3 ; 2) est un vecteur normal du plan (ABC) et un vecteur directeur de D.
   M(x ; y ; z) $\in$ D $\Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = t\,\overrightarrow{n}$ ($t \in \mathbb{R}$) $\Leftrightarrow \begin{cases} x = 6t \\ y = 3t \\ z = 2t \end{cases}$ ($t \in \mathbb{R}$).
   $\begin{cases} x = 6t \\ y = 3t \\ z = 2t \end{cases}$ ($t \in \mathbb{R}$) est une représentation paramétrique de D.

(c) Les coordonnées du point d'intersection de (ABC) et D est solution du système :

$$\begin{cases} x = 6t \\ y = 3t \\ z = 2t \\ 6x + 3y + 2z - 6 = 0 \end{cases}$$

On remplace x, y et z dans la dernière équation : $36t + 9t + 4t - 6 = 0$

et on trouve t : $49t = 6$ soit $t = \dfrac{6}{49}$. Ainsi H$\left(\dfrac{36}{49} ; \dfrac{18}{49} ; \dfrac{12}{49}\right)$.

3. (a) La distance de O au plan (ABC) est : $\text{OH} = \dfrac{|6 \times 0 + 3 \times 0 + 2 \times 0 - 6\,|}{\sqrt{6^2 + 3^2 + 2^2}} = \dfrac{6}{7}$

(b) $\mathcal{V}\ \text{(OABC)} = \dfrac{1}{3} \times \text{OC} \times \mathcal{A}\ \text{(OAB)}$ avec $\mathcal{A}\ \text{(OAB)} = \dfrac{1}{2} \times \text{OA} \times \text{OB} = \dfrac{1}{2} \times 1 \times 2 = 1$

$\mathcal{V}\ \text{(OABC)} = \dfrac{1}{3} \times 3 = 1$

De plus $\mathcal{V}\ \text{(OABC)} = \dfrac{1}{3} \times \text{OH} \times \mathcal{A}\ \text{(ABC)}$

$$1 = \frac{1}{3} \times \frac{6}{7} \times \mathcal{A}\ \text{(ABC)} \iff \mathcal{A}\ \text{(ABC)} = \frac{7}{2}$$

(c) $[\mathcal{A}\ \text{(ABC)}\,]^2 = \dfrac{49}{4}$

$[\mathcal{A}\ \text{(OAB)}\,]^2 = 1$

$[\mathcal{A}\ \text{(OAC)}\,]^2 = [\,\dfrac{1}{2} \times \text{OA} \times \text{OC}\,]^2 = \dfrac{9}{4}$

$[\mathcal{A}\ \text{(OBC)}\,]^2 = [\,\dfrac{1}{2} \times \text{OB} \times \text{OC}\,]^2 = 9$

$[\mathcal{A}\ \text{(OAB)}\,]^2 + [\mathcal{A}\ \text{(OAC)}\,]^2 + [\mathcal{A}\ \text{(OBC)}\,]^2 = \dfrac{49}{4}$

En effet, $[\mathcal{A}\ \text{(ABC)}\,]^2 = [\mathcal{A}\ \text{(OAB)}\,]^2 + [\mathcal{A}\ \text{(OAC)}\,]^2 + [\mathcal{A}\ \text{(OBC)}\,]^2$

EXERCICE 4 (spécialité)

1. (a) $6 \equiv 6\ [11]$ $\quad 6^2 \equiv 3\ [11]$ $\quad 6^3 \equiv 7\ [11]$ $\quad 6^4 \equiv 9\ [11]$ $\quad 6^5 \equiv -1\ [11]$ donc $6^{10} \equiv 1\ [11]$

   Le reste de la division euclidienne de 6^{10} par 11 est 1.

   (b) $6 \equiv 1\ [5]$ $\quad 6^2 \equiv 1\ [5]$ donc $6^4 \equiv 1\ [5]$

   Le reste de la division euclidienne de 6^4 par 5 est 1.

   (c) $6^{10} \equiv 1\ [11]$ donc $(6^{10})^4 \equiv 1^4\ [11]$ soit $6^{40} \equiv 1\ [11]$

   $6^4 \equiv 1\ [5]$ donc $(6^4)^{10} \equiv 1^{10}\ [5]$ soit $6^{40} \equiv 1\ [5]$

   (d) $6^{40} \equiv 1\ [11]$ donc $6^{40} - 1$ est un multiple de 11 et $6^{40} \equiv 1\ [5]$ donc $6^{40} - 1$ est un multiple de 5 donc 5 et 11 divisent $6^{40} - 1$, or 5 et 11 sont premiers entre eux donc $6^{40} - 1$ est divisible par 55.

2. (a) (E) : $65x - 40y = 1$

   65 et 40 sont des multiples de 5 or 5 ne divise pas 1 donc (E) n'a pas de solution car x et y sont des entiers relatifs.

   (b) (E') : $17x - 40y = 1$

   $40 = 17 \times 2 + 6$

   $17 = 6 \times 2 + 5$

   $6 = 5 \times 1 + 1$

   $5 = 1 \times 5 + 0$ donc PGCD(17 , 40) = 1 et on en déduit que 40 et 17 sont premiers entre eux.

   Ainsi, d'après Bézout, (E') admet au moins une solution.

   (c) $6 = 40 - 17 \times 2$

   $5 = 17 - 6 \times 2 = 17 - [\,40 - 17 \times 2\,] \times 2 = 17 \times 5 - 40 \times 2$

$1 = 6 - 5 = [\ 40 - 17 \times 2\ ] - [17 \times 5 - 40 \times 2\ ] = 17 \times (-7) - 40 \times (-3)$

Le couple $(-7\ ;-3)$ est une solution particulière de (E').

(d) (E') $\Leftrightarrow 17x - 40y = 17 \times (-7) - 40 \times (-3)$

$\Leftrightarrow 17(x + 7) = 40(y + 3)$ (E'')

17divise $40(y + 3)$ et 17 et 40 sont premiers entre eux donc, d'après Gauss, 17 divise $y + 3$,
il existe donc un entier k tel que $y + 3 = 17k$ soit $y = 17k - 3$
dans (E'') : $17(x + 7) = 40 \times 17k \Leftrightarrow x = 40k - 7$.
Réciproquement, si $x = 40k - 7$ et $y = 17k - 3$ avec $k \in \mathbb{Z}$ alors $17(40k - 7) - 40(17k - 3) = 1$,
le couple (x, y) est solution de (E').
Les couples (x, y) solutions de (E') sont tels que $x = 40k - 7$ et $y = 17k - 3$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Soit $(x_0\ ; y_0)$ une solution de (E'). Alors $17x_0 = 40\ y_0 + 1 \equiv 1\ [40]$.
D'autre part, $x_0 = 40\ \text{k} - 7$. Si on veut de plus que $0 \le x_0 \le 40$, il faut prendre $k = 1$ d'où $x_0 = 33$.

3. Soient a et b tels que $a^{17} \equiv b\ [55]$ et $a^{40} \equiv 1\ [55]$.
D'après la question précédente : $17 \times 33 \equiv 1\ [40]$ d'où $17 \times 33 = 40\,p + 1$ avec $p \in \mathbb{Z}$.

Si $a^{17} \equiv b\ [55]$ alors : $(a^{17})^{33} \equiv b^{33}\ [55] \Leftrightarrow a^{40\,p+1} \equiv b^{33}\ [55] \Leftrightarrow (a^{40})^{p} \times a \equiv b^{33}\ [55]$

Or par hypothèse, $a^{40} \equiv 1\ [55]$ donc $\text{a} \equiv b^{33}\ [55]$.