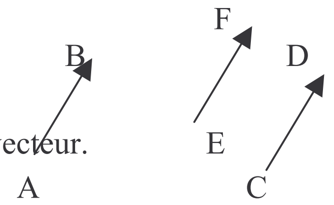
Fiche résumé : **VECTEURS , COORDONNEES** 2^{nd}

1) Définitions:

Vecteur : défini par une direction, un sens, et une distance.



$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF}$

Tous les couples de points (A,B) ; (C,D) et (E,F) représentent le même vecteur.

A = Origine du vecteur $\overrightarrow{AB}$; B = extrémité du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

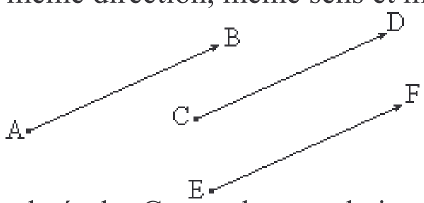
Rq : $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$ = vecteur nul ; distance AB = $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$ norme du vecteur

$-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$

2) Egalité vectorielle :

On dit que deux vecteurs sont **égaux** lorsqu'ils ont même direction, même sens et même longueur.

On note $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF}$



Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ alors AB**D**C est un parallélogramme

Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ alors $t_{\overrightarrow{AB}}$(C) = D , D est le translaté de C par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ (et réciproquement).

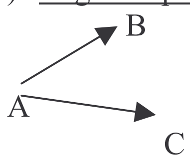
Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ alors les segments [AD] et [BC] ont le même milieu (et réciproquement).

3) Addition de vecteurs :

a) Relation de CHASLES : Pour 3 points A,B et C distincts, on a $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

Simplifier l'écriture de $\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{FE}$

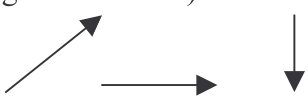
b) Règle du parallélogramme : pour ajouter 2 vecteurs de même origine.



Construire le point D tel que AB**D**C soit un parallélogramme .

Alors $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}$

c) Somme de vecteurs quelconques : « les mettre bout à bout » (à l'extrémité de l'un, placer l'origine de l'autre)



Tracer un représentant de la somme de ces trois vecteurs .

x

4) Multiplication par un réel :

Définition : Soient $\vec{u}$ un vecteur ; A et B deux points du plan tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$;et k un nombre réel quelconque. Le produit du vecteur $\vec{u}$ par le nombre k est noté $k\vec{u}$ et est tel que :

a) Si k>0 alors $\vec{u}$ et $k\vec{u}$ sont des vecteurs de même direction et sens et $k\vec{u}$ a pour longueur kAB.

b)Si k<0 alors $\vec{u}$ et $k\vec{u}$ sont 2 vecteurs de même direction mais de sens contraire et $k\vec{u}$ a pour longueur -kAB.

Si k = 0 alors $k\vec{u} = \vec{0}$ Vecteur nul.

Propriétés : $k(\vec{u}+\vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$; $(h+k)\,\vec{u} = h\vec{u} + k\vec{u}$; $h(k\vec{u}) = hk\,\vec{u}$ (h,k réels, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ vecteurs)

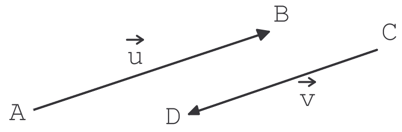
$k\vec{u} = \vec{0} \Leftrightarrow k = 0$ ou $\vec{u} = \vec{0}$

Caractérisation du milieu d'un segment : I milieu de [AB] $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{BI} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ $\Leftrightarrow$

$\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$ …..

Exercice : Soient A et B 2 points donnés du plan, construire le point M tel que $2\overrightarrow{BM} + 3\overrightarrow{AM} = \vec{0}$.

5) Vecteur colinéaires :Définition : 2 vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls, sont **colinéaires** s'ils ont **la même direction.**



Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires signifie que les droites (AB) et (CD) sont parallèles ou confondues.

Propriété : Si 2 vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls sont colinéaires alors il existe un réel k non nul tel que v = k$\vec{u}$ (et réciproquement).

Remarque : Par convention, on dit que le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur $\vec{u}$.

6) **Points alignés** : Théorème : Trois points A,B et C distincts sont alignés si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires. (et réciproquement).

Exercice : Soient A, B , C trois points distincts non alignés du plan et D et E des points tels que $\overrightarrow{AD} = -2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$, montrer que les points A , E et D sont alignés.

7) **Repèrage d'un point**

a) Sur une droite :

Choisir un repère sur une droite Δ, c'est se donner deux points distincts O et I de Δ, pris dans cet ordre. O est l'**origine du repère**. Posons alors $\overrightarrow{OI} = \vec{i}$.

Le vecteur $\vec{i}$ est appelé **vecteur de base**. Le repère sera noté (O ; $\vec{i}$).

Définition : L'abscisse du point M de Δ dans le repère (O ; $\vec{i}$) est le **réel** x tel que $\overrightarrow{OM} = x\,\vec{i}$

b) Dans le plan : Définition : (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$) est un **repère** du plan. Il est constitué d'un point O appelé **origine** du repère et d'une **base** ($\vec{i}$, $\vec{j}$), c'est à dire deux vecteurs non colinéaires pris dans cet ordre.

Remarque :

- Lorsque les directions des vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont perpendiculaires, la base ($\vec{i}$, $\vec{j}$) est **orthogonale**.
- Une unité de longueur étant choisie, si $\vec{i}$ et $\vec{j}$ ont des directions perpendiculaires et ont pour longueur une unité , alors la base ($\vec{i}$, $\vec{j}$) est **orthonormale**.

Soient x et y deux réels, le point M a pour coordonnées (x ;y) dans le repère (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$) équivaut à $\overrightarrow{OM} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$

8) Coordonnées de vecteurs:

- Calculs : Si on a A (x_A ; y_A) et B (x_B ; y_B) alors $\overrightarrow{AB}$ = (x_B - x_A ; y_B - y_A) « extrémité moins origine »
- Si dans un repère quelconque $\vec{u}$ (x, y) et $\vec{v}$ (x', y') alors $\vec{u} + \vec{v}$ (x+x' , y+y') ; k$\vec{u}$ (kx ; ky) ; $\vec{u} = \vec{v}$ équivaut à x = x' et y = y'
- **Relation de colinéarité** : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont 2 **vecteurs colinéaires** si **xy'-x'y = 0** (ou xy' = x' y) et réciproquement.

Exercice : Le plan est muni d'un repère (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$). On considère les points A(-2 ; 3), B(4 ; -1) et C(1 ; 4). Déterminer le réel y tel que le point D(4 ; y) soit tel que ABCD est un trapèze, de bases parallèles [AB] et [CD].

- Dans un repère quelconque , si on a A (x_A ; y_A) et B (x_B ; y_B) alors le milieu I de [AB] a pour coordonnées : I ($\frac{x_A + x_B}{2}$; $\frac{y_A + y_B}{2}$)
- Dans un repère **orthonormal** si on a A (x_A ; y_A) et B (x_B ; y_B) alors la distance AB et telle que :

$$\mathbf{AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} \quad \text{ou} \quad \mathbf{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$