

Divisibilité par 2, 3, 7 et 13 de certains entiers naturels**Énoncé**

Pour tout entier naturel n non nul, on considère le nombre U_n défini par :

$$U_n = 1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^{n-1}.$$

On cherche à déterminer si ce nombre peut être divisible par l'un ou plusieurs des nombres premiers suivants : 2 ; 3 ; 7 et 13.

Partie A

1. À l'aide d'un logiciel adapté, calculer U_1, U_2, \dots, U_{30} .
2. Déterminer les listes des restes de la division de U_n par 2 ; par 3 ; par 7 et par 13.

(a) Quelles conjectures peut-on en tirer ?

Appeler l'examineur pour lui présenter les conjectures trouvées.

(b) À quelle(s) condition(s) sur n , le nombre U_n semble-t-il être divisible par 7×13 ? par $2 \times 7 \times 13$?

Appeler l'examineur pour lui présenter les conjectures trouvées.

Partie B

3. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, U_n est divisible par 7 si, et seulement si, 7 divise $3^n - 1$.

Appeler l'examineur pour vérification

4. À l'aide de la question précédente, démontrer la conjecture émise pour 7.
5. Dans le cas où U_n est divisible par 7, U_n est-il divisible par 7×13 ? par $2 \times 7 \times 13$?

Production demandée

- Les différentes conjectures.
- La démonstration de la question 4.

Quelques commentaires personnels sur la fiche 122 2009

« divisibilité ... »

Logiciel utilisé : Excel

Attention ! MOD() ne marche pas quand le nombre est trop grand : utiliser alors
= nombre- ENT(nombre/diviseur)*diviseur

n	$3^{(n-1)}$	u_n	divisible par 2?	divisible par 3?	divisible par 7?	divisible par 13?
1	1	1	1	1	1	1
2	3	4	oui, reste 0	1	4	4
3	9	13	1	1	6	oui, reste 0
4	27	40	oui, reste 0	1	5	1
5	81	121	1	1	2	4
6	243	364	oui, reste 0	1	oui, reste 0	oui, reste 0
7	729	1093	1	1	1	1
8	2187	3280	oui, reste 0	1	4	4
9	6561	9841	1	1	6	oui, reste 0
10	19683	29524	oui, reste 0	1	5	1
11	59049	88573	1	1	2	4
12	177147	265720	oui, reste 0	1	oui, reste 0	oui, reste 0
13	531441	797161	1	1	1	1
14	1594323	2391484	oui, reste 0	1	4	4
15	4782969	7174453	1	1	6	oui, reste 0
16	14348907	21523360	oui, reste 0	1	5	1
17	43046721	64570081	1	1	2	4
18	129140163	193710244	oui, reste 0	1	oui, reste 0	oui, reste 0
19	387420489	581130733	1	1	1	1
20	1162261467	1743392200	oui, reste 0	1	4	4
21	3486784401	5230176601	1	1	6	oui, reste 0
22	10460353203	15690529804	oui, reste 0	1	5	1
23	31381059609	47071589413	1	1	2	4
24	94143178827	141214768240	oui, reste 0	1	oui, reste 0	oui, reste 0

Conclusion : sujet original où la partie mathématique n'est pas négligeable ; penser à

transformer $u_n = \frac{3^n - 1}{2}$ et à observer les congruences de 3^n modulo 7 (3-2-6-3...) et modulo 13 (3-9-1-3...)