collection Textes de référence – Lycée [LEGT]
Documents d'accompagnement des programmes

Mathématiques

cycle terminal de la série littéraire

Ministère de l'Éducation nationale, de l'Enseignement supérieur et de la Recherche
Direction de l'enseignement scolaire

outil pour la mise en œuvre des programmes 2004

Centre national de documentation pédagogique

Ce document a été écrit à la demande de la direction de l'enseignement scolaire par le groupe d'experts ayant rédigé les programmes de l'enseignement obligatoire et de l'enseignement de spécialité de mathématiques. Le groupe de travail, présidé par Bernard PARZYSZ, professeur des universités à l'IUFM d'Orléans-Tours, est composé des membres suivants :

Jean MOUSSA	inspecteur général de l'Éducation nationale
Marie-Hélène SALIN	maître de conférences à l'IUFM d'Aquitaine
Josette FEURLY-RAYNAUD	professeure de mathématiques à Lyon
Nicole COURÇON	professeure de mathématiques au Mans
Françoise MUNCK-FRABOUL	IA-IPR à Nantes
Philippe SERES	professeur de mathématiques à Paris
Suzy HAEGEL	professeure de mathématiques à Saverne

Coordination : Véronique FOUQUAT, bureau du contenu des enseignements, direction de l'enseignement scolaire.

Suivi éditorial : Christianne Berthet & Corinne Paradas

Secrétariat d'édition : Nicolas Gouny

Mise en pages : Michelle Bourgeois

CNDP/Scérén, Téléport 1@4
BP 80158
86961 Futuroscope cedex
ISBN : 2-240-02092-X
ISSN : en cours

Sommaire

Introduction 5

Acquisition transversale de compétences en logique 7

Exemples 8

À propos des symboles =, <, > et du sens de variation des fonctions 11

Le raisonnement par récurrence 13

Quelques repères épistémologiques 13

Enseigner le raisonnement par récurrence 14

Analyse des difficultés 14

Proposition de problèmes pour l'introduction de ce raisonnement 16

D'autres énoncés 17

Algorithmique 18

Algorithme répondant à un problème donné 18

Comprendre ce qu'un algorithme donné produit 20

Quelques précisions concernant la traduction d'un algorithme en programme 20

Arithmétique 23

Écriture des entiers naturels 23

Entiers naturels et nombres premiers 27

Analyse – classe de première 34

Transformations algébriques 34

Effet de certaines fonctions sur l'ordre 35

Dérivation 35

Exemples de problèmes utilisant des fonctions 37

Analyse – classe terminale 40

Écriture décimale des nombres réels 40

Écriture décimale d'un nombre rationnel 40

Fonctions exponentielles 42

Fonctions logarithme népérien et logarithme décimal 45

Géométrie 46

Classe de première – la perspective parallèle 47

Classe terminale – la perspective centrale 58

Introduction

Ce document est destiné en priorité aux professeurs qui enseignent l'option obligatoire mathématiques de la classe de première L ou la spécialité mathématiques en classe terminale L. Il explicite et détaille les intentions du programme en proposant des démarches et des exemples destinés à guider chaque enseignant dans l'élaboration de son cours. Certains points du programme, préconisant des démarches peut-être moins classiques ou correspondant à des domaines – ou des points de vue – avec lesquels les professeurs sont peut-être moins familiers, ont été plus particulièrement développés ; c'est le cas, par exemple, de l'introduction de la fonction exponentielle en analyse et de la perspective en géométrie, ainsi que des domaines « transversaux » que constituent, dans ce programme, la logique et l'algorithmique. Des liens avec des champs extérieurs aux mathématiques, en particulier les arts et l'histoire, qui permettent des prolongements – et éventuellement des collaborations – avec des collègues d'autres disciplines, ont été indiqués. En revanche, certains points n'ont pas fait l'objet d'un traitement particulier, soit parce qu'ils sont « classiques » (suites arithmétiques et géométriques, étude de fonctions…), soit parce qu'ils figurent déjà dans les documents d'accompagnement d'autres séries, sous des formes évidemment propres à ces séries mais qui peuvent être adaptées aux exigences de la série L : par exemple, une partie du programme de probabilités figure également dans la série S. On pourra également se reporter avec profit au document d'accompagnement de l'option facultative précédemment en vigueur pour la série L. En outre, des références bibliographiques ou de sites Internet sont fournies, afin de permettre aux enseignants qui le souhaitent d'approfondir certains points qui les intéresseraient à titre personnel. Enfin, l'accent a également été mis sur des points précis du programme qui offrent des conditions favorables à l'acquisition des compétences propres aux domaines transversaux, tels la logique dans certaines démonstrations ou l'algorithmique dans le recours aux technologies (calculatrice, ordinateur).

Mais ce document a également pour ambition d'être utile aux professeurs de mathématiques des autres séries, qui pourront y trouver – en les adaptant au besoin – des idées d'activités. Sont aussi fournies, grâce tout particulièrement au travail proposé en logique, des pistes de remédiation à des problèmes qui font classiquement obstacle à la compréhension des élèves. Ils pourront aussi comparer les approches d'une même notion dans les diverses séries et, en évaluant leurs avantages et leurs inconvénients, se faire une meilleure idée de la spécificité de chacune d'elles, ce qui leur permettra d'appréhender de façon plus globale l'enseignement des mathématiques au lycée.

Acquisition transversale de compétences en logique

L'objectif est de permettre aux élèves une appropriation progressive de quelques notions de logique dont l'utilisation est indispensable pour clarifier des énoncés ou des situations mathématiques qui ne présentent pas de difficultés du point de vue des contenus. Il ne s'agit pas de faire un travail formel de logique, qui utiliserait le vocabulaire spécifique de ce domaine. Les quantificateurs, les tables de vérité ne sont en aucun cas à introduire dans cet enseignement.
En mathématiques, une partie du travail porte sur la formulation et la compréhension d'énoncés. Pour identifier les difficultés que rencontrent les élèves à ce propos, considérons par exemple la phrase suivante : « Si x est un naturel pair, alors $x+1$ est premier. »
Pour expliciter divers points de vue possibles à son sujet, un vocabulaire spécialisé, qui n'a pas la prétention d'être universel, est utilisé dans le paragraphe qui suit, dans l'unique but de préciser efficacement les notions en jeu. Il est hors de question d'utiliser ce vocabulaire spécialisé avec les élèves.
Du point de vue de la logique, la phrase « Si x est un naturel pair, alors $x+1$ est premier » est une « phrase ouverte », c'est-à-dire une phrase qui énonce une propriété s'appliquant à une variable x, qui représente ici un nombre. Telle qu'elle est formulée, cette phrase n'est pas une proposition et n'a donc pas de valeur de vérité : elle n'est ni vraie, ni fausse. Cette phrase ouverte fournit cependant des propositions susceptibles de porter le vrai et le faux, lorsqu'on fixe à la fois le type de quantification (existentiel ou universel) et le domaine décrit par la variable. On peut ainsi construire, à partir de la phrase ouverte précédente :
– Une proposition universellement quantifiée dans l'ensemble des entiers compris entre 1 et 7, qui s'énonce ainsi : « P1 – Pour tout entier naturel n compris entre 1 et 7, si n est pair, alors $n+1$ est premier. »
Cette proposition est vraie et pour le montrer il suffit de vérifier que, pour chaque choix de la variable dans l'ensemble considéré, l'implication particulière obtenue est vraie.
– Une proposition universellement quantifiée dans l'ensemble des entiers compris entre 1 et 20, qui s'énonce ainsi : « P2 – Pour tout entier naturel n compris entre 1 et 20, si n est pair, alors $n+1$ est premier. »
Cette proposition est fausse ; pour le montrer il suffit de trouver une valeur de la variable dans cet ensemble pour laquelle la propriété particulière obtenue est fausse, c'est la règle du contre-exemple.
– Une proposition existentiellement quantifiée dans l'ensemble des entiers naturels, qui s'énonce ainsi : « P3 – Il existe au moins un naturel n dans $\mathbb{N}$ tel que si n est pair, alors $n+1$ est premier. »
Cette proposition est vraie ; il suffit pour le montrer de trouver un naturel qui fournit une implication particulière vraie. Dans ce cas, un exemple suffit à démontrer une propriété de ce type.
– Une proposition existentiellement quantifiée dans l'ensemble $\{8,14,20,26,32\}$, qui s'énonce ainsi : « P4 – Il existe au moins un nombre n dans l'ensemble $\{8,14,20,26,32\}$, tels que si n est pair, alors $n+1$ est premier. »
Cette proposition est fausse ; il faut, pour le montrer, vérifier qu'aucun des nombres 8, 14, 20, 26, 32 ne fournit une propriété particulière vraie.
Pour les élèves, l'apprentissage du « bon comportement », pour ce qui concerne la formulation, la compréhension d'énoncés mathématiques et les stratégies à adopter afin de se prononcer sur leur valeur de vérité, ne va pas de soi. Deux points sont essentiels pour conduire avec les élèves un travail qui prenne en charge ces apprentissages.

– D’une part, en pratique, dans la communauté des mathématiciens, on ne prend pas toujours la peine de distinguer une phrase ouverte d’une proposition de type implicatif universellement quantifiée. Ainsi la phrase ouverte citée au début peut être parfois identifiée implicitement à la proposition « Pour tout naturel x pair, $x+1$ est premier » et par suite, déclarée fausse; la prise en compte du contexte de travail suffit d’habitude aux mathématiciens pour se comprendre sans ambiguïté.
Il n’en est pas de même lorsqu’on est dans un contexte d’enseignement, où les élèves n’ont aucune familiarité avec ces pratiques.
Il est donc nécessaire de saisir toutes les occasions de clarifier certains implicites du discours en mathématiques, en décodant avec les élèves certains énoncés. Ceux de type implicatif, en particulier, sont très souvent quantifiés universellement, de manière implicite, et cela à l’aide de formulations variées.
– D’autre part, proposer, à partir de contenus de programme qui s’y prêtent, un travail qui porte explicitement sur la validité de certaines propositions mathématiques est indispensable pour permettre aux élèves de progresser.
Pour mener avec profit un tel travail sur le vrai et le faux, on privilégiera chaque fois que possible une approche par des situations de recherche (ce que le programme mentionne comme « problème de type ouvert ») choisies pour permettre la construction par les élèves du domaine de validité de propositions quantifiées universellement ou existentiellement.
En effet, pour un tel type de problème, il est nécessaire que les élèves puissent d’abord mettre en œuvre une étude expérimentale, comprenant une phase de recherche et de formulation de conjectures, qui permet, par une confrontation collective des résultats, de clarifier des énoncés, d’en préciser les contours et de lever les implicites de certaines formulations. La recherche de domaines de validité s’insère naturellement dans cette démarche, le travail de généralisation et de preuve n’arrivant qu’en fin de parcours.
On peut noter qu’en ce qui concerne les propositions quantifiées universellement, la recherche du plus grand domaine de validité possible revient alors à construire une généralisation de propriétés envisagées au départ sur un ensemble de référence plus petit.
Bien que les connaissances actuelles ne donnent aucune certitude à propos du transfert des compétences de logique mathématique à d’autres champs scientifiques ou à d’autres domaines, pour lesquels le type d’argumentation employé est de nature souvent très différente, le fait d’insister sur les deux aspects évoqués (clarification des implicites et constructions du domaine de validité) contribuera certainement à construire des habitudes de pensée pertinentes aussi bien en mathématiques qu’en dehors de leur champ.
Le travail sur ces deux aspects n’est bien sûr pas le seul visé dans cette formation; il est cependant indispensable pour aborder sur des bases claires les diverses notions proposées de façon transversale (en particulier proposition conditionnelle et réciproque, négation d’une proposition, contre-exemple…).
La description de quelques situations d’apprentissage, proposée dans le paragraphe suivant, vise à donner des pistes qui favorisent les deux aspects cités. L’une se situe dans le domaine de l’arithmétique, l’autre dans celui de l’analyse.

Exemples

Ces exemples de problèmes d’arithmétique sont exploitables dès la classe de première.
Chercher des multiples de 15 qui sont aussi multiples de 22. Peut-on les trouver tous (ou tous jusqu’à 5000)?
Chercher des multiples de 15 qui sont aussi multiples de 30. Peut-on les trouver tous (ou tous jusqu’à…)?
Chercher des multiples de 15 qui sont aussi multiples de 99. Peut-on les trouver tous (ou tous jusqu’à…)?
Et si les nombres sont m et p?
Construire trois listes de propriétés mathématiques concernant les multiples communs aux nombres proposés (ou multiples communs jusqu’à…):
– une pour lesquelles vous avez suffisamment d’arguments pour affirmer avec certitude que les propositions de cette liste sont vraies;
– une autre pour laquelle vous avez suffisamment d’arguments pour affirmer avec certitude qu’elles sont fausses;
– une dernière liste de propriétés pour lesquelles vous hésitez.

La recherche sur les multiples communs de nombres donnés a comme avantage de permettre à des élèves débutants dans ce type de recherche de se lancer en énumérant les multiples des nombres proposés et en les comparant. On peut utiliser à cet effet un tableur ou une calculatrice, à condition que l'affichage soit suffisamment lisible. Si ce n'est pas le cas avec une calculatrice, l'utilisation d'un logiciel est à privilégier.
Il n'y a bien sûr pas de gestion uniforme d'une telle activité avec les élèves : on peut proposer d'autres nombres, on peut aussi choisir de ne pas faire travailler tous les élèves sur les mêmes nombres, afin de faciliter la formulation de conjectures plus solides. On peut limiter ou non la recherche à un seuil à déterminer, les élèves peuvent alors obtenir des certitudes, puisqu'il s'agit dans ce cas de comparer des ensembles finis.
Ce travail peut permettre de formuler des conjectures pour les nombres proposés, mais la validation de résultats généraux nécessite la construction d'un raisonnement de difficulté différente dans les trois cas proposés.
Enfin la généralisation à m et p comporte plusieurs degrés possibles et même un travail modeste de ce point de vue reste intéressant en particulier pour l'étude de propositions de type implicatif.
Cette recherche permet de travailler sur les compétences de logique.

Le travail sur les compétences de logique

Une première partie du travail peut être faite par petits groupes, ce qui permet la discussion entre élèves. L'enseignant peut leur renvoyer, si nécessaire, des interventions ou des questions, par exemple :
– Est-ce que ce sont les seuls nombres qui conviennent ?
– Pouvez-vous écrire les listes complètes de multiples communs à … et à … jusqu'à … ?
Après la phase de recherche, une mise en commun est nécessaire pour confronter les propositions des élèves. Ce travail peut être initialisé ou enrichi par des propositions de l'enseignant, pour lesquelles ils doivent se prononcer sur la valeur de vérité, par exemple :
– N'importe quel nombre inférieur à 5 000 qui est multiple commun à 15 et 22 est aussi multiple de 330.
– Des multiples de 15 qui sont multiples de 30, ce sont par exemple les multiples de 450.
– Certains multiples de 15 sont aussi multiples de 30.
– Les multiples de 30 sont aussi des multiples de 15.
– Des multiples de 15 qui sont aussi multiples de 99, ce sont par exemple les multiples de 1 485.
– Chaque fois qu'un nombre est multiple de 1 485, alors il est multiple de 15 et de 99.
– Jusqu'à 5 000, les multiples de 15 qui sont aussi multiples de 22, ce sont les multiples de 330.
– Si un nombre quelconque est multiple à la fois de 15 et 30, alors il est forcément multiple de 450.
– Jusqu'à 5 000, certains multiples communs à 15 et 99 ne sont pas multiples de 1 485.
Pour certaines de ces propositions, la validation fait intervenir un nombre fini de vérifications, qui constituent des exemples ou des contre-exemples, ainsi que la notion de proposition réciproque. Pour que les élèves parviennent à repérer des phrases ayant le même sens, il est important de proposer des propriétés de formulation variée, certaines comportant une quantification plus explicite que d'autres. Les propositions de type implicatif universellement quantifiées sont celles dont le repérage pose le plus de problème aux élèves.
Plusieurs formulations sont possibles, ce que l'on peut schématiser ainsi :
En nommant P et Q les propriétés concernées et E l'ensemble de référence pour la quantification :
– si un x de E vérifie P, alors il vérifie Q.
– Chaque fois que x dans E vérifie P, alors il vérifie Q.
– Les x de E (tous les x…) tels que P sont tels que Q.
– N'importe quel x de E tel que P est tel que Q.
– Un x de E tel que P est (toujours, forcément, obligatoirement, nécessairement) tel que Q.
– Des x de E tels que P sont (toujours, forcément, obligatoirement, nécessairement) tels que Q.

Il est important de remarquer que l'article indéfini a parfois le même sens que l'article défini (il désigne alors un élément générique de l'ensemble considéré) et qu'on emploie aussi bien le singulier que le pluriel pour ce type de propriétés.
Après l'exploration du problème sur les nombres proposés au départ, on peut par exemple travailler sur la propriété : « Si un nombre est multiple à la fois de m et de p, alors il est multiple de m fois p. »
Une réaction prévisible dans la classe, qui peut d'ailleurs apparaître à propos des phrases comportant des nombres proposées lors de la première partie du travail, est que la propriété est à la fois vraie et fausse. Ce type de réponse peut être considéré comme relevant d'un stade d'apprentissage intermédiaire acceptable, à condition qu'on l'interprète explicitement comme : « Il y a des valeurs numériques de m et p pour lesquelles la proposition est vraie et d'autres où elle est fausse. »
La seule façon de régler la question est alors d'identifier la quantification universelle sous-entendue dans la propriété visée, comme une convention implicite interne à la communauté des mathématiciens, ce qui ne va pas de soi pour beaucoup d'élèves.
On peut alors énoncer la proposition suivante comme vraie : « Pour certaines valeurs de m et p, les nombres multiples de m et de p sont exactement les multiples de m fois p. »
On peut ensuite rechercher le domaine de validité le plus large possible permettant de produire à partir de la propriété étudiée une proposition quantifiée universellement qui soit vraie.
Ce travail sur la propriété citée ou sur d'autres relève d'une démarche de généralisation.

La question des démonstrations et du degré de généralisation

Il ne faut pas exclure *a priori* la possibilité d'aller, avec certains élèves, au bout de la recherche et d'envisager la généralisation à m et p, en essayant par exemple :
– de caractériser les nombres pour lesquels les multiples communs à m et p sont exactement les multiples de m fois p ;
– de caractériser les nombres pour lesquels les multiples communs à m et p sont exactement les multiples de m ;
– de caractériser les multiples communs à m et p de façon générale dans les autres cas.
Ce n'est évidemment pas une obligation et l'enseignant est libre d'engager ou non ses élèves dans une activité de preuve. C'est à lui d'évaluer si le coût de telles démonstrations n'est pas trop élevé. Voici quelques éléments susceptibles d'aider à une telle prise de décision.
On peut présenter deux types de preuve pour ces propriétés.
Le premier type est classique : le théorème de Gauss n'étant pas connu des élèves, le seul théorème utilisable dans le cadre de ce programme pour de telles démonstrations est celui de l'existence et l'unicité de la décomposition en produit de facteurs premiers, qui lui est équivalent (voir à ce sujet la démonstration en fin de chapitre, page 12), et une propriété qui en découle, à savoir : « Si p est premier et si p divise ab, alors p divise a ou p divise b. » Ce type de preuve ne s'appuie pas, de fait, sur la recherche par listes.
Une autre démonstration exploite les listes de multiples, et paraît donc intéressante, car elle se situe dans la lignée du travail précédent (voir dans la bibliographie la brochure *Enseigner l'arithmétique*). Elle paraît difficile quand on la présente avec des entiers p et q quelconques pour montrer que les multiples communs à p et q sont les multiples de leur plus petit multiple commun. Mais elle peut être transcrite à l'identique pour des entiers particuliers, en conservant tout son intérêt.
La voici par exemple pour prouver que les multiples communs à 15 et 99 sont les multiples de 495 :
« Soit L15 la liste des multiples de 15, de même pour L99 et L495.
– Alors tout élément de L495 est dans les deux autres listes. En effet un multiple de 495, qui est lui-même multiple de 15 et de 99, est aussi un multiple de 15 et de 99.
– Réciproquement, il existe des nombres qui sont à la fois dans L15 et L99. D'après la confrontation des listes obtenues à l'aide du tableur, 495 est le plus petit d'entre eux qui soit non nul.
Quel sera le suivant ? Appelons-le A. Comme il est dans L15, 15 divise à la fois 495 et A, 15 divise A – 495. Il en est de même pour 99, donc A – 495 est à la fois dans L15 et L99. Comme 495 est le plus petit élément non nul commun à ces deux listes, 495 sera la plus petite valeur non nulle de A – 495. D'où A – 495 = 495, c'est-à-dire A = 990.
On peut ensuite généraliser :

Considérons un élément a non nul, à la fois dans L15 et L99. a est supérieur au sens large à 495, donc il est compris entre deux multiples successifs de 495 ; il existe un entier q tel que $495q \leqslant a < 495(q + 1)$, c'est-à-dire $0 \leqslant a - 495q < 495$. Comme a et 495 sont tous deux multiples de 15 et 99, $a - 495q$ l'est aussi, et on a obligatoirement, en tenant compte de la double inégalité précédente, $a - 495q = 0$, ce qui montre que a est multiple de 495 et figure donc dans L495. »

À propos des symboles =, <, > et du sens de variation des fonctions

L'utilisation de symboles =, > ou < avec leurs différents sens, intervient tout au long du cursus d'enseignement en mathématiques, quelle que soit la série. Les élèves rencontrent à la fois des transformations d'expressions algébriques, et des résolutions d'équations et d'inéquations par l'algèbre, puis par l'analyse, en utilisant éventuellement les informations apportées par la représentation graphique des fonctions mises en jeu.

Les symboles employés entre deux expressions algébriques sont les mêmes, alors que la signification et les questions sous-jacentes sont tout à fait différentes et souvent d'ailleurs dépendantes du contexte.

Par exemple en première, le chapitre « Analyse » contient :

– l'étude de problèmes faisant intervenir des fonctions simples et la résolution d'équations et d'inéquations reliées à ces problèmes ;

– la mise en œuvre de transformations algébriques permettant l'étude du sens de variation de fonctions du second degré ou homographiques à partir de fonctions plus simples.

Lorsqu'on traite ces contenus de programme (voir à ce sujet le chapitre « Analyse », pages 40 et suivantes), on peut proposer un travail centré sur le sens de l'égalité et de l'inégalité. On peut, par exemple, poser la question « Vrai ou faux ? » pour les phrases suivantes :

$-x^2 + 4x - 2 = -(x - 2)^2$.	$-x^2 + 4x - 2 \leqslant (x - 2)^2$.
$-x^2 + 4x - 2 = 2 - (x - 2)^2$.	$-x^2 + 4x - 2 \leqslant 3 - (x - 2)^2$.
$-x^2 + 4x - 2 = -(x + 3)^2$.	$-x^2 + 4x - 2 \leqslant -(x + 3)^2$.
$40x / (20 + x) = 40$.	$40x / (20 + x) \geqslant 39$.

Pour obtenir des réponses valides, il faut transformer chaque phrase (qui du point de vue de la logique est une phrase ouverte sans valeur de vérité) pour produire des propositions qui précisent explicitement la quantification et le domaine de validité qui lui est attaché. Ce travail peut être conduit à la fois dans le cadre algébrique ou le cadre graphique, selon le problème dans lequel il s'insère. Il amène à distinguer des égalités ou inégalités vraies ou fausses pour toute valeur de la variable, d'égalités ou d'inégalités vraies pour quelques valeurs de x et fausses pour d'autres.

Un autre travail possible concerne le sens de variation de fonctions sur des intervalles. Cela offre une bonne occasion d'attirer l'attention des élèves sur la quantification universelle de la proposition de type implicatif qui constitue la définition de la croissance ou décroissance d'une fonction sur un intervalle.

À propos de l'étude d'une fonction g assez simple, par exemple $g(x) = -x^2 + 4x - 2$ ou $g(x) = \dfrac{40x}{20 + x}$

on peut travailler à partir de la représentation graphique avec l'énoncé suivant :

« Déterminer quand cela est possible, un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans lequel g soit définie, de sorte que les propriétés suivantes soient vraies :

1) Certains nombres a, b, c, d de I sont tels que $a < b$ et $c < d$ et $g(a) \geqslant g(b)$ et $g(c) \leqslant g(d)$.

2) Pour certains réels a et b de I on a à la fois $a < b$ et $g(a) \geqslant g(b)$.

3) Pour n'importe lesquels des réels a et b de I tels que $a < b$, on a $g(a) < g(b)$.

4) Si deux réels a et b quelconques de I sont tels que $a < b$, alors on a nécessairement $g(a) > g(b)$. »

La consigne est de trouver un domaine de validité pour des propositions quantifiées concernant une fonction bien déterminée. D'autres consignes voisines sont possibles : par exemple, donner plusieurs choix d'intervalles pour chaque item, et demander un tri « vrai/faux ».

Comme il y a de multiples réponses possibles pour chaque item, leur confrontation est un moteur de la discussion entre élèves. L'enseignant peut proposer de comparer les diverses propositions et demander pour certains items que les élèves s'accordent sur l'intervalle le plus large possible qui répond aux conditions données.

Selon les choix proposés pour l'intervalle I, on obtient des propriétés quantifiées existentiellement ou universellement dont il faut décider si elles sont vraies ou fausses, pour ne retenir que les choix de I fournissant des propriétés vraies (ou trier les choix pour I donnant des phrases vraies de ceux donnant des phrases fausses). Il n'est pas toujours possible de trouver I; par exemple pour la seconde fonction proposée, qui est croissante sur les deux intervalles où elle est définie, et en particulier sur $[0, +\infty[$ (voir le problème des vitesses aller et retour dans le chapitre « Analyse », page 37), la proposition issue de la phrase 4 ou de la phrase 2 n'est vraie pour aucun choix de I et il en est de même pour la proposition issue de la phrase 1, qui nécessite un intervalle où la fonction ne soit pas monotone.
Lorsque I existe, et à condition qu'il soit correctement choisi :
– la proposition vraie issue des phrases 3 et 4 constitue la définition de la croissance ou décroissance stricte de la fonction en jeu sur l'intervalle choisi ;
– avec le même choix d'intervalle I, la proposition issue de la phrase 2 est la négation de celle qui est issue de la phrase 3, c'est la définition d'une fonction non décroissante sur I;
– la proposition vraie issue de la phrase 1 correspond à une fonction non monotone sur un intervalle : la fonction n'y est ni croissante, ni décroissante, ce qui montre que ces deux propositions étant fausses en même temps, l'une n'est pas la négation de l'autre.

Équivalence du théorème de Gauss avec l'existence et l'unicité de la décomposition en produit de facteurs premiers

1) On suppose l'existence et l'unicité de la décomposition d'un nombre en facteurs premiers.
Soit a, b, c trois entiers tels que a et b soient premiers entre eux et tels que a divise bc.
Alors il existe un entier d vérifiant $ad = bc$. L'existence des décompositions permet d'écrire :

$b = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$,

$c = q_1^{\beta_1} q_2^{\beta_2} \dots q_p^{\beta_p}$,

$a = r_1^{\gamma_1} r_2^{\gamma_2} \dots r_m^{\gamma_m}$,

$d = s_1^{\delta_1} s_2^{\delta_2} \dots s_n^{\delta_n}$,

avec, peut-être, quelques p_i se retrouvant parmi les q_j et quelques r_i se retrouvant parmi les s_j.
Ainsi $X = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots q_k^{\alpha_k}, \ q_1^{\beta_1} q_2^{\beta_2} \dots q_p^{\beta_p}, \ = r_1^{\gamma_1} r_2^{\gamma} \dots r_m^{\gamma_m}, \ s_1^{\delta_1} s_2^{\delta_2} \dots s_n^{\delta_n}$.
L'unicité de la décomposition de X entraîne que chaque r_i est un p_j ou un q_j : si $r_i = p_j$ alors a et b ayant un diviseur commun ne seraient pas premiers entre eux, donc chaque r_i est un q_j et n'est pas un p_h.
L'unicité, encore, donne alors, pour les exposants $r_i^{\gamma_i} = q_j^{\beta_j}$ ou $r_i^{\gamma_i + \delta_t} = q_j^{\beta_j}$ (au cas où $ri = st$). D'où $\gamma_i \leqslant \beta_j$.
Ainsi $a = r_1^{\gamma_1} r_2^{\gamma_2} \dots r_m^{\gamma_m}$ et $c = r_1^{\beta_1} r_2^{\beta_2} \dots r_n^{\beta_n} \dots r_u^{\beta_u}$ (en renommant éventuellement les facteurs de c) et alors $c = ae$ où e est un entier. Donc a divise c.
2) La réciproque est connue.
Le théorème de Gauss équivaut à l'existence/unicité de la décomposition d'un nombre en produit de facteurs premiers.

Bibliographie

– Durand-Guerrier Viviane, Le Berre Maryvonne, Feurly-Reynaud Josette, Pontille Marie-Claude, *Le Statut logique des énoncés dans la classe de mathématiques*, IREM de Lyon, 2000.
– *Enseigner l'arithmétique*, IREM de Poitiers, 2000.
– Durand-Guerrier Viviane, *Logique et raisonnement mathématique, Défense et illustration de la pertinence du calcul des prédicats pour une approche didactique des difficultés liées à l'implication*, thèse de l'université Claude Bernard/Lyon I, 1996.

Le raisonnement par récurrence[1]

Le raisonnement par récurrence offre une occasion pertinente de travailler avec les élèves le sens de l'implication et d'expliciter les quantifications universelle ou existentielle relatives à la variable n, selon les différentes phases du raisonnement produit. [■ Logique[2]]

Quelques repères épistémologiques

Le raisonnement par récurrence que Poincaré considère comme « le raisonnement mathématique par excellence[3] » a été utilisé dès le XVIIe siècle, en particulier par Pascal, dans *Le Traité du triangle arithmétique* sous une forme non axiomatisée.

Ce mode de raisonnement permet le passage du « fini » à l'« infini » que Pascal semble considérer d'une certaine manière comme « allant de soi ». Il écrit par exemple : « Quoique cette proposition ait une infinité de cas, j'en donnerai une démonstration bien courte, en supposant deux lemmes :

Le premier, qui est évident de soi-même, que cette proposition se rencontre dans la seconde base.

Le second, que si cette proportion se trouve dans une base quelconque, elle se trouvera nécessairement dans la base suivante.

D'où il se voit qu'elle est nécessairement dans toutes les bases : car elle est dans la seconde base par un premier lemme ; donc par le second elle est dans la troisième, donc dans la quatrième et à *l'infini*[4].

Il faut donc seulement démontrer le second lemme en cette sorte[5]. »

Ceci s'applique bien aux résultats conjecturés depuis longtemps, que Pascal cherchait à établir. Dans de nombreux cas cependant, l'apparente simplicité d'une telle démonstration ne doit pas cacher la difficulté qu'il peut y avoir à conjecturer la proposition générale qu'il s'agit d'établir.

Un exemple moins immédiat de démonstration par récurrence est présenté par Jean Dhombres dans un article intitulé : *Les Progressions de l'infini : rôle du discret et du continu au XVIIe siècle*[6]. Cet article fait une large place aux travaux de Grégoire de Saint-Vincent (1584-1667) et présente en particulier une preuve de cet auteur qui contient une récurrence non explicitée dans le domaine de la géométrie euclidienne des proportions.

Ces exemples illustrent le fait que dès le XVIIe siècle, le raisonnement par récurrence est mis en œuvre de manière implicite, sans que le passage à l'infini soit problématisé. Pour Pascal comme pour Grégoire de Saint-Vincent, sa légitimité ne semble faire aucun doute.

Pourtant, lorsque, deux siècles plus tard, Peano propose une construction axiomatique de l'ensemble des entiers naturels, il introduit un cinquième axiome, l'« axiome d'induction » sur lequel repose le principe de récurrence.

1. D'après Durand-Guerrier Viviane, Le Berre Maryvonne, Feurly-Reynaud Josette, Pontille Marie-Claude, *Le Statut logique des énoncés dans la classe de mathématiques*, IREM de Lyon, 2000.
2. Le symbole [■] indique un renvoi ou un lien possible avec d'autres parties du programme.
3. Poincaré Henri, *La Science et l'Hypothèse* (1902), Flammarion, 1968, coll. « Champs », page 38.
4. C'est nous qui soulignons.
5. Pascal, *Le Traité du triangle arithmétique* (vers 1654), cité dans Dhombres & *alii*, *Mathématiques au fil des âges*, Gauthier-Villars, 1987.
6. Dans *Histoire d'infini. Actes du 9e colloque inter-IREM. Épistémologie et histoire des mathématiques*, IREM de Brest, 1994.

Enseigner le raisonnement par récurrence

Les ambitions sont modestes, car la spécificité des élèves de série L est à prendre en compte.
– Les raisonnements présentés ne doivent pas comporter des parties trop calculatoires, dont la technicité trop grande pour les élèves de série L viendrait obscurcir le sens du raisonnement lui-même.
– En pratique, la propriété à démontrer est ou bien donnée dans l'énoncé, ou bien à découvrir. Dans ce dernier cas, la conjecture à formuler doit être suffisamment évidente, sans pour autant être triviale, et ne doit pas être source de difficulté.
– Sauf pour les suites arithmétiques et géométriques, les suites définies par récurrence ne figurent pas au programme de cette classe, même s'il n'est pas exclu que l'étude de certaines situations puisse y faire appel, mais sans que l'on dispose ni du vocabulaire, ni des notions et résultats enseignés habituellement dans d'autres séries à ce propos. Ainsi toute une gamme d'exercices habituellement pratiqués lorsqu'on enseigne le raisonnement par récurrence est ici proscrite.
Ce qui est visé, c'est que les élèves aient rencontré quelques exemples de démonstrations par récurrence et en aient saisi les caractéristiques principales en liaison avec la structure spécifique de $\mathbb{N}$.

L'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels

– Entre le naturel n et le naturel $n + 1$, il n'y a aucun autre entier naturel, on dira que $n + 1$ est le successeur de n. Dans $\mathbb{N}$, tout naturel a un successeur.
– Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ a un plus petit élément, ce qui n'est pas le cas par exemple pour l'ensemble des décimaux.
– Dans un ensemble où chaque élément a un successeur, on peut définir la notion de propriété héréditaire. Dire qu'une propriété est héréditaire dans un ensemble, c'est dire que si un entier de l'ensemble vérifie cette propriété, alors son successeur la vérifie nécessairement.

Le principe de la démonstration par récurrence

Un résultat fondamental : toute propriété vérifiée par 0 et héréditaire dans $\mathbb{N}$ est vérifiée par tous les entiers naturels.
Ce résultat n'est autre que l'axiome d'induction dans l'axiomatique de Peano. Il fournit un moyen de démontrer qu'une propriété conjecturée ou vérifiée sur quelques entiers naturels est vérifiée par tous. Il s'étend au cas d'une propriété vérifiée par un naturel n_0 et héréditaire dans l'ensemble des entiers supérieurs à n_0.
Remarquons enfin que dans beaucoup de problèmes accessibles aux élèves de cette série, le raisonnement par récurrence n'est pas le seul outil envisageable pour obtenir le résultat souhaité. Comparer plusieurs types de démonstration d'un même résultat est alors intéressant.

Analyse des difficultés

Notion de successeur

La notion de successeur est fondamentale dans le raisonnement par récurrence. Or certains élèves ne perçoivent pas immédiatement que $n + 1$ désigne le successeur de n, ils l'interprètent comme somme de deux nombres, sans percevoir l'aspect fonctionnel de cette notion : dans ce cas, l'interprétation par exemple de $n + 2$ comme successeur de $n + 1$, et la substitution de $n + 1$ à n pour obtenir la formulation de $P(n + 1)$ à partir de celle de $P(n)$ posent problème.

Démonstration de l'hérédité d'une propriété P

Une première difficulté est liée à la conception « commune » de l'implication, selon laquelle affirmer la vérité d'une implication, c'est affirmer la vérité de son antécédent. Sous une telle conception, souvent fréquente chez les élèves, la démonstration de

l'hérédité peut paraître absurde. Un exemple comme celui qui est proposé plus loin peut être utile pour travailler ce point.
Une autre difficulté tient au fait que dans les démonstrations les plus courantes d'énoncés conditionnels universellement quantifiés, les hypothèses qui correspondent à l'antécédent de l'implication se présentent comme des faits, par exemple des données de l'énoncé ou des résultats établis précédemment. Dans le raisonnement par récurrence, il n'en est pas de même : l'élève doit identifier l'élément générique sur lequel fonder la démonstration, il doit déclarer qu'un entier vérifie la propriété P.
Pour faire cela, une pratique courante consiste à employer l'expression « Supposons P(n) », ce qui est source d'obstacles importants. Examinons différentes formulations.

« Supposons P(n). Montrons P(n + 1) »
Cette formulation s'avère très ambiguë, les élèves pouvant aussi bien comprendre :
– supposons que pour tout entier naturel n, P(n) ;
– supposons qu'il existe un entier naturel n tel que P(n) ;
– supposons que pour un entier n préalablement introduit, P(n).
Dans le premier cas, il n'y a rien à démontrer. L'élève ne comprend pas l'utilité de ce qui suit. Dans les deux autres cas, il reste aussi perplexe, puisqu'on vient justement de montrer qu'un entier n vérifie bien la propriété P, en amorce du raisonnement.
Il faut donc absolument lever l'ambiguïté. Pour cela on peut penser à l'une des formulations qui suivent.

« Soit n un entier. Supposons P(n). Montrons P(n + 1) »
La première phrase signale, dans la pratique courante, l'introduction d'un entier générique et P(n) renvoie à cet entier. Mais le risque que l'énoncé P(n) soit considéré comme une affirmation universellement vraie n'est pas nul, ce qui nous ramène au premier cas ci-dessus.

« Supposons qu'il existe un entier n tel que P(n). Montrons P(n + 1) »
On a déjà noté que la première phrase peut apparaître comme absurde. De plus, la deuxième phrase est ininterprétable. En effet, dans l'énoncé « il existe un entier n tel que P(n) », la variable n est muette, autrement dit on pourrait remplacer la lettre n par toute autre lettre, on pourrait par exemple écrire : « Supposons qu'il existe un entier k tel que P(k). Montrons P(n + 1). »

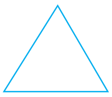
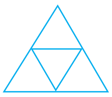
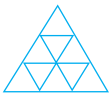
L'analyse précédente conduit à conseiller de ne plus utiliser la formulation « Supposons P(n) » et à la remplacer par une formulation qui introduit explicitement n comme un entier vérifiant la propriété P, par exemple : « Considérons un entier n tel que P(n) ; montrons P(n + 1). »
Dans cette formulation, on considère un élément parmi ceux qui vérifient la propriété P, ce qu'on est assuré de pouvoir faire, dans la mesure où on a montré qu'il en existe un pour pouvoir initier la démonstration. On retrouve ici la méthode générale pour démontrer une propriété universelle donnée sous forme conditionnelle, lorsqu'on est assuré qu'il y a au moins un élément vérifiant la propriété antécédente.

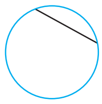
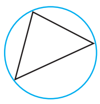
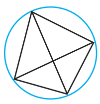
Différents statuts de l'écriture P(n)

Au moment de l'identification de la propriété P, l'écriture P(n) désigne une phrase ouverte dans laquelle n est une variable. Dans la formulation de la conjecture sous la forme « quel que soit n de $\mathbb{N}$, P(n) », on obtient une proposition, dans laquelle n est une variable décrivant $\mathbb{N}$. Le statut de n n'est donc pas le même que celui de l'entier qu'on utilise au moment de la démonstration de l'hérédité, où cet entier désigne alors un élément parmi ceux vérifiant P.
Il apparaît donc souhaitable que, pour marquer cette différence de statut, on choisisse d'utiliser dans la démonstration de l'hérédité une lettre différente de celle qu'on utilise dans la formulation de la conjecture.

Proposition de problèmes pour l'introduction de ce raisonnement

Au cours de sa scolarité, l'élève a été amené à travailler par induction, c'est-à-dire comme le dit G. Polya « à découvrir des lois générales en partant de l'observation d'exemples particuliers et de leur combinaison », en sciences expérimentales et en mathématiques. Mais en mathématiques, une « loi induite » ne sera considérée comme valable qu'après avoir été démontrée ; cette nécessité est parfois difficile à percevoir pour les élèves.
C'est pourquoi il paraît profitable de leur proposer au début de cet apprentissage et simultanément au moins deux situations, dont l'une met en évidence la nécessité d'une démonstration pour transformer l'intuition en certitude.

Empilement de triangles équilatéraux		
Une rangée		Un triangle
Deux rangées		Quatre triangles
Trois rangées		Neuf triangles
Pouvez-vous faire une conjecture sur le nombre de triangles lorsqu'on a 100 rangées ? la démontrer ? et pour n rangées ?		

Points sur un cercle et nombre maximal de régions délimitées dans le disque		
Deux points		Deux régions
Trois points		Quatre régions
Quatre points		Huit régions
Pouvez-vous faire une conjecture sur le nombre maximal de régions du disque lorsqu'on augmente le nombre de points sur le cercle ?		

Pour chacun des exemples, les élèves rentrent facilement dans le problème. Les premiers décomptes sont faciles à effectuer, et il n'y a donc pas de doute sur les premiers résultats.

Premier problème

Pour ce problème, la conjecture est aisée à trouver et à formuler, et du coup, la conviction de l'exactitude du résultat est très forte. Dès les premiers rangs, on a une idée correcte de la relation de récurrence, son exploitation est simple et ne pose aucun problème technique.

Il y a plusieurs démonstrations possibles, dont certaines n'utilisent pas la récurrence, ce qui peut permettre des comparaisons.
On peut en effet utiliser le fait que le nombre de triangles par rangée est constitué par la suite des nombres impairs, qu'il faut alors sommer pour obtenir le résultat visé.
Une autre possibilité utilise la similitude des triangles équilatéraux : le coefficient d'agrandissement entre le petit triangle de base et le grand triangle constitué des n rangées est n pour les longueurs et n^2 pour les aires. Le nombre de petits triangles contenus dans le grand est donc n^2.

Deuxième problème

Son principal intérêt, notamment après l'exemple précédent, est de montrer que la généralisation d'une formule vraie pour quelques entiers n'est pas toujours correcte. En effet, le nombre de régions successivement obtenu, par les élèves qui ont la patience de continuer un peu plus loin est 16 pour 5 points, puis 31 pour 6 points, et 57 pour 7 points.
La recherche d'une formule correcte est technique et délicate. À ce niveau, on ne peut que reconnaître ce problème comme trop difficile, et l'abandonner.

Autres énoncés

– Montrer que pour n naturel, le nombre $3n^2 + 3n + 6$ est toujours multiple de 6.

N.B. – Difficulté modeste pour la démonstration par récurrence ; autre démonstration directe possible en regroupant et factorisant les deux premiers termes de la somme, qui font apparaître le double de la somme des premiers entiers naturels.

– Montrer que pour n naturel, le nombre $n^2 + n + 2$ est toujours pair.

N.B. – Difficulté modeste pour la démonstration par récurrence ; autres démonstrations directes possibles soit en regroupant et factorisant les deux premiers termes de la somme, qui font apparaître le double de la somme des premiers entiers naturels, soit en distinguant deux cas, n pair et n impair.

– Quel est, pour un ensemble E à n éléments, le nombre total de parties de E ?

– Démontrer que $9^n - 2^n$ est toujours multiple de 7.

N.B. – Difficulté moyenne pour la démonstration par récurrence ; il y a d'autres démonstrations possibles par la factorisation de $9^n - 2^n$ ou par les congruences, ce qui montre la puissance de cet outil. Il existe d'autres énoncés du même type dans les chapitres consacrés aux congruences des manuels.

– Montrer que la propriété dépendant de n suivante « $10^n + 1$ est multiple de 9 » est héréditaire. Est-elle vraie pour certains naturels ? pour tous ?

N.B. – C'est un exemple qui montre que la démonstration de l'hérédité ne suffit pas à prouver la vérité d'une proposition, puisqu'on peut aisément constater que cette propriété est fausse pour les premiers naturels et même fausse pour tous si on utilise par exemple le critère de divisibilité par 9 en numération décimale.

Algorithmique

Le développement fulgurant de l'informatique ces dernières décennies est lié à la réalisation de logiciels toujours plus puissants et fondés sur la conception et la mise en œuvre d'algorithmes. Parmi les plus utilisés « sans le savoir », on peut citer les algorithmes de compression de données et les algorithmes des moteurs de recherche.

Dans un tel contexte, il est essentiel que les élèves soient suffisamment familiarisés avec le type particulier de démarche que nécessite l'algorithmique. L'enseignement des mathématiques constitue un point d'ancrage particulièrement favorable pour cela.

Le travail à réaliser prolonge l'apprentissage des élèves amorcé durant les années antérieures. Citons par exemple la compréhension et la mise en œuvre des algorithmes des opérations et en particulier de celui de la division euclidienne dès l'enseignement primaire, d'algorithmes de recherche du PGCD étudiés en classe de troisième. Mais dans le cadre de ce programme, construire un algorithme pour résoudre un problème, c'est non seulement trouver une méthode de calcul d'une solution à ce problème, mais écrire cette méthode sous forme d'une suite d'instructions élémentaires : affectations de variables (initialisation ou calcul), branchements (condition ou boucle itérée), affichages. Il s'agit donc d'aller plus loin que dans les classes antérieures, afin de rendre les élèves capables de concevoir par eux-mêmes quelques algorithmes simples et de comprendre ce que produisent certains algorithmes plus complexes.

Outre son intérêt culturel, cet apprentissage présente également un objectif pédagogique important, convergeant avec l'objectif poursuivi par le travail à réaliser sur la logique. Il s'agit d'apprendre aux élèves à imaginer ou à suivre le déroulement d'une suite d'instructions en fonction de conditions logiques.

L'étude d'algorithmes doit être proposée régulièrement, pour résoudre des problèmes simples, sans que l'algorithmique ne fasse l'objet d'un enseignement isolé. Un enjeu important consiste à permettre aux élèves de faire la différence entre la résolution abstraite d'un problème et la production d'une solution exacte ou approchée de ce problème. Les programmes de l'enseignement obligatoire au choix de première L et de spécialité de terminale L permettent de choisir diverses activités à cet effet. Des points pertinents sont signalés dans le programme et des algorithmes sont brièvement décrits dans différentes rubriques du document d'accompagnement.

Algorithme répondant à un problème donné

La nature des objectifs poursuivis dans ce domaine est éclairée par le développement d'un exemple qui ne doit pas avoir valeur de modèle mais simplement servir de support à la réflexion.

Considérons le problème : « Donner l'écriture d'un entier naturel N en base b. »

Ce problème et un algorithme permettant de le résoudre sont suffisamment simples pour que l'élaboration d'un tel algorithme puisse être un attendu d'un élève en fin de cycle terminal.

L'analyse du problème permet de décrire en français la stratégie à adopter, par exemple : « Effectuer la division euclidienne de N par b. On obtient un quotient q et un reste r, qui est le chiffre des unités de l'écriture cherchée. Diviser le quotient q par b. On obtient un nouveau quotient et un nouveau reste qui fournit le second chiffre de l'écriture du nombre à partir de la droite. Recommencer cette opération jusqu'à obtenir un quotient égal à 0. Les restes successifs obtenus sont placés à la gauche des uns des autres, pour former l'écriture recherchée. »

Si une telle description représente bien un stade de traitement du problème, stade nécessaire à l'élaboration d'un algorithme, elle ne résume pas pour autant l'attendu des élèves en la matière. Il faut leur apprendre à définir clairement trois points essentiels d'un algorithme, à savoir son entrée, une description précise du traitement à réaliser et sa sortie. Autrement dit les élèves doivent devenir capables de proposer, en fonction de la demande, ou bien une écriture de cet algorithme en langage naturel ou bien une programmation de cet algorithme sur un tableur, une calculatrice ou un logiciel dédié.

Écriture en langage « naturel »

Exemple d'écriture en langage « naturel »

Entrée

1. On initialise en affectant à A la valeur N.

Procédure

2. On effectue la division euclidienne de A par b. On obtient un quotient et un reste. On affecte à A la valeur de ce quotient et on garde ce reste (qui est l'un des chiffres de l'écriture recherchée).
On réitère cette procédure tant que le contenu de A n'est pas nul.

Test d'arrêt

3. L'écriture de N dans la base b s'obtient en disposant de droite à gauche tous les restes dans l'ordre où ils ont été obtenus.

Le traitement consiste à effectuer une succession de divisions euclidiennes par b, chaque dividende se déduisant du précédent.
Déclarer une mémoire A dans laquelle seront stockés l'une après l'autre les différentes valeurs de ce dividende est donc fondamental.

Traitement

Comme il y a une boucle, un test d'arrêt s'impose.

Sortie

Test « manuel » de l'algorithme

Avant toute programmation d'un algorithme que ce soit sur un tableur, sur une calculatrice ou avec un logiciel adapté, il est essentiel que les élèves prennent l'habitude de faire un traitement manuel de cet algorithme sur un exemple, afin de le « concrétiser » et d'en vérifier la logique.

Réaliser un test « manuel » n'interdit pas toute utilisation de la calculatrice. Cela signifie simplement que la calculatrice peut être utilisée pour les calculs élémentaires, mais pas en mode programmation.

Exemple

Déterminer les chiffres en base 16 du nombre 654 321.

En base 16, pour les chiffres au-delà de 9, on utilise A de valeur 10, B de valeur 11, C de valeur 12, D de valeur 13, E de valeur 14, F de valeur 15.

Solution :

• 654 321 : 16 = 40 895,…

Le quotient est 40 895. 65 4321 – 16 40 x 895 = 1. Le reste est 1.

On écrit en base 16 le chiffre 1 de valeur 1.

• 40 895 : 16 = 2 555,…

Le quotient est 2 555. 40895 – 16 x 2555 = 15. Le reste est 15.

On écrit à gauche le chiffre F de valeur 15 : F1.

• 2555 : 16 = 159,…

Le quotient est 159. 2555 – 16 x 159 = 11. Le reste est 11.

On écrit à gauche le chiffre B de valeur 11 : BF1.

• 159 : 16 = 9,….

Le quotient est 9. 159 – 16 x 9 = 15. Le reste est 15.

On écrit à gauche le chiffre F de valeur 15 : FBF1

• Le quotient 9 est inférieur à la base et donne le dernier chiffre : 9FBF1

Conclusion : le nombre 654 321 s'écrit en base 16 : 9FBF1

Comprendre ce qu'un algorithme donné produit

N est un entier naturel non nul. 1. Initialisation : la liste L est vide.	**Entrée**
2. Pour tout entier naturel k compris entre 1 et N : – on effectue la division euclidienne de N par k. On obtient un quotient et un reste ; – si le reste est nul alors on écrit k dans la liste L sinon on passe à l'entier k suivant. Quand toutes les valeurs de k ont été examinées, on calcule le nombre S des termes de la liste L.	**Traitement** **Test d'arrêt**
3. On affiche S.	**Sortie**

Que représente S ? Faire fonctionner manuellement un tel algorithme sur un nombre N est une bonne stratégie pour comprendre ce qu'il produit.

Quelques précisions concernant la traduction d'un algorithme en programme

L'écriture d'un programme permet l'adaptation de l'algorithme à l'outil utilisé. Cette écriture n'est pas un exigible au baccalauréat, mais a pour intérêt de permettre de concrétiser l'aspect « automatique » de l'algorithme et d'exploiter ses résultats.

Comparaison entre différents outils de traitement

Compte tenu de la vitesse de calcul et des capacités de mémoire et d'affichage d'un ordinateur, le tableur permet l'affichage simultané de toutes les étapes et de tous les résultats des calculs, alors que la calculatrice dispose d'un nombre beaucoup plus restreint de variables. La calculatrice permet par contre de visualiser un déroulement pas à pas de l'algorithme. Un logiciel dédié comme celui proposé sous le nom « execalgo.txt » peut permettre de bénéficier des avantages de l'un et de l'autre.

Au niveau des calculs

La traduction des calculs dépend de l'outil utilisé, avec toutefois des convergences.

– La nécessité d'écrire les calculs en ligne impose l'utilisation de parenthèses habituellement sous-entendues.

Par exemple $\frac{A}{B+C}$ s'écrit en ligne A / (B + C), sous peine de produire $\frac{A}{B} + C$.

Les élèves doivent être habitués à réagir correctement devant ces difficultés. En revanche il faudrait veiller à tolérer des parenthèses superflues.

– Le signe de la multiplication est généralement le caractère × ou la touche [*].

À la différence des tableurs, les calculatrices autorisent parfois qu'il soit sous-entendu, comme dans l'écriture mathématique usuelle. Il est préférable d'éviter ces sous-entendus, même lorsqu'ils sont tolérés : sur certains modèles de calculatrice, A : 2*B est calculé comme $\frac{A}{2} \times B$ alors que A : 2B est calculé comme $\frac{A}{2B}$.

– Le symbole de la division décimale est variable : sur ordinateur, la barre oblique [/], mais sur calculatrice, on trouve d'autres écritures.

– Pour le quotient et le reste euclidien, certaines calculatrices ou certains tableurs disposent de fonctions spécifiques, mais on peut toujours utiliser la fonction partie entière : $E(n/b)$ donne le quotient euclidien de n par b et $n - b*E(n/b)$ donne le reste. Selon les outils et leur langue d'utilisation, la fonction partie entière peut s'écrire E ou ENT ou INT.

Au niveau des affectations

L'affectation du résultat d'un calcul à une variable dépend de l'outil utilisé : « Donner à A la valeur A + 1 » se traduit sur une calculatrice par : A + 1 → A ou A = A + 1…
Sur un tableur, la formule « = A1 + 1 » ne peut pas être placée dans la cellule A1. On utilise donc généralement des cellules différentes pour mémoriser les valeurs successives d'une même variable.
Comme par ailleurs une feuille de calcul ne se présente pas comme une suite linéaire d'instructions, la traduction d'un algorithme sur un tableur, lorsqu'elle est possible, sera toujours très différente, dans sa conception même, de sa traduction sur une calculatrice programmable ou un logiciel de programmation.

Au niveau des tests et branchements

Un « programme », pour une calculatrice programmable ou un logiciel de programmation, se compose d'une liste d'instructions élémentaires qui sont par défaut exécutées dans l'ordre de leur apparition dans le texte du programme.
Pour pouvoir selon les besoins ne pas exécuter une partie du texte, ou recommencer une partie du texte écrite avant, on a souvent besoin d'effectuer des tests et des branchements.
Les points de branchement sont appelés sur les calculatrices « étiquettes », traduction de l'anglais *label* (Lbl en abrégé).

Exemple de programmations de l'algorithme étudié ci-dessus			
Type d'instruction	**En « langage naturel »**	**Sur Casio**	**Sur TI**
Point de branchement	[Début boucle]	Lbl 1	
Affectation	Donner à Q la valeur E(N/B)	Int(N/B) → Q	
Affectation	Donner à R la valeur N – B*Q	N–B*Q → R	
Affichage	Afficher R	R	Disp R
Affectation	Donner à N la valeur Q	Q → N	
Branchement conditionnel	Aller à [Début boucle] si N > 0	N > 0 Goto 1	If N > 0 Goto 1

N.B.
– Les calculatrices utilisent souvent des mémoires nommées de « A » à « Z ».
– Il convient de distinguer n, nombre dont on cherche l'écriture, et la variable *N*, initialement égale à n, mais qui change de valeur au cours de l'exécution du programme.
– Les variables *N* et *B* doivent avoir été affectées avant l'exécution du bloc ci-dessus.
– Les calculatrices programmables proposent un nombre croissant de fonctionnalités (*if then else endif, while, for, repeat,* etc.) selon les modèles utilisés. On pourra se limiter à l'utilisation des instructions les plus élémentaires présentes sur tous les modèles, de façon à ne pas perdre de vue l'essentiel, à savoir la compréhension de l'algorithme.

Programmation d'un algorithme sur un tableur

Quelques particularités du tableur :
– Lorsqu'on « tire » vers le bas les formules saisies en B2, C2 et A3, on obtient dans les différentes cellules de la colonne A, les contenus successifs de la mémoire A définie dans l'algorithme décrit en langage naturel.
– Bien qu'il y ait implicitement boucle il n'y a pas de test d'arrêt : on s'arrête de « tirer » lorsque l'on constate que les cellules sont remplies de « 0 ».

Programme donnant l’écriture d’un nombre n en base b

On place b en D2, n en A2.
Pour le quotient de la division de n par b :
taper en B2 : **= ENT(A2/D2).**
Pour le reste : taper en C2 : **= A2 – D2*B2.**
Pour remplacer n, taper en A3 : = **B2.**
Étendre vers le bas les trois formules précédentes.

La reconstitution du nombre 9FBF1 peut être faite « manuellement ».

	A	B	C	D
1	n	q	r	base
2	654321	40895	1	16
3	40895	2555	15	
4	2555	159	11	
5	159	9	15	
6	9	0	9	
7	0	0	0	
8	0	0	0	
9	0	0	0	
10	0	0	0	
11	0	0	0	
12	0	0	0	

On retrouve les étapes fondamentales de l’algorithme : entrée, traitement et sortie.

Arithmétique

L'ambition première de cette partie du programme est de consolider les connaissances des élèves sur les nombres entiers :
– des connaissances en rapport avec l'histoire des mathématiques. Il a fallu des millénaires pour que les hommes mettent au point, très récemment par rapport à l'évolution historique, le système de numération décimal de position qui nous paraît aujourd'hui si naturel. Son efficacité et son économie de moyens sont remarquables même si sa complexité mathématique est grande. Il est important pour des élèves littéraires de prendre conscience que des objets mathématiques aussi élémentaires ont une histoire, liée à la culture et à l'évolution économique des civilisations qui nous ont précédées, histoire non close puisque l'utilisation de la base deux et de la base hexadécimale en informatique est tout à fait récente ;
– des connaissances relatives aux concepts mathématiques. S'il n'est pas question de présenter ni de démontrer sous sa forme générale le théorème fondamental de la numération (« étant donné un entier naturel b, $b \geqslant 2$, on peut écrire de manière unique tout entier naturel sous la forme d'une somme de puissances de b, chacune d'entre elles multipliée par un entier naturel inférieur à la base »), les élèves doivent avoir compris la genèse du système de numération de position.
Ils doivent aussi être capables d'utiliser l'écriture d'un nombre pour prouver des propriétés de ce nombre, comme certains caractères de divisibilité, ou expliquer des phénomènes curieux sur les nombres entiers. On leur demande également d'être capables de faire la différence entre une propriété intrinsèque au nombre (comme être divisible par 9) et la façon dont cette propriété se traduit sur l'écriture du nombre dans une base.
Enfin, le questionnement que l'on peut mener avec les élèves sur la confusion chiffre/nombre, courante dans le langage usuel, fournit une occasion d'expliciter certaines exigences propres au langage mathématique.
La décomposition d'un nombre en produit de facteurs premiers est un théorème fondamental dans ce programme, puisqu'on ne dispose pas du théorème de Gauss. Ce théorème n'est pas un exigible du programme de seconde. Cependant la plupart des élèves ont déjà résolu des exercices où la décomposition en produits de facteurs premiers était demandée ou utilisée. Ils peuvent constater dans les faits l'existence et l'unicité de cette décomposition. Aucun exposé théorique ne doit être fait pour le démontrer ; il s'agit seulement d'en donner un énoncé clair afin qu'il puisse être disponible en tant qu'outil.
Cette partie du programme a également une ambition de formation. Elle offre un terrain très favorable à l'apprentissage du raisonnement, à l'acquisition de compétences élémentaires de logique et à la mise en œuvre de quelques algorithmes.

Écriture des entiers naturels

À propos des numérations non positionnelles

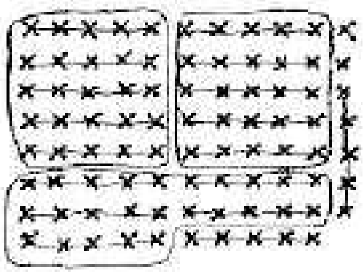
Pour permettre aux élèves d'identifier l'efficacité du système décimal de position, le programme préconise une confrontation modeste à d'autres systèmes de numération.
– Partir de l'écriture de plusieurs nombres dans un même système, et de la donnée de ces nombres dans l'écriture usuelle, et demander d'écrire de nouveaux nombres. Il peut être intéressant de ne pas fournir tous les symboles nécessaires (en prévenant les élèves) de manière à ce qu'ils réfléchissent aux informations supplémentaires à demander.

Exemple de la numération égyptienne	
Numération égyptienne	**Numération usuelle**
	530
	200 203
?	100 025
?	2 395

– Guider l'étude comparative avec le système décimal de position par un questionnement tel que :
• Pourquoi, dans notre numération, n'y a-t-il pas de symbole pour dix, cent, mille ?
• Pourquoi utilisons-nous un 0 à la différence de la numération présentée ?
• Que se passe-t-il si on change l'ordre des symboles dans l'écriture des nombres ?
• La longueur de l'écriture du nombre permet-elle la comparaison des nombres entiers ? dans notre numération ? dans la numération égyptienne ?
– Demander aux élèves (après avoir étudié une numération additive comme la numération égyptienne) de proposer des améliorations au système d'écriture, pour raccourcir la longueur des nombres. Par comparaison avec notre système, ils peuvent proposer l'invention de nouveaux chiffres, qui ajoutés aux symboles des puissances de dix conduisent à une numération hybride, comme la numération chinoise, qu'il peut être intéressant de présenter et de mettre en relation avec notre numération orale. Ces deux systèmes, écriture avec des chiffres et désignation orale, utilisés constamment dans la vie courante, sont de fait très différents, mais il n'est pas évident que tous les élèves s'en soient rendus compte.
– Faire effectuer le calcul d'une addition ou d'une soustraction dans une de ces numérations, ce qui en montre la complexité et justifie l'emploi généralisé des abaques ou des bouliers.

Les numérations de position en base différente de 10

La plupart des numérations créées par les hommes ont fait intervenir des groupements par dix, nombre des doigts des deux mains. Le programme propose de travailler, sur des exemples, l'écriture de nombres dans une base autre que 10. [■ Algorithmique]
– Une première étape peut être de conduire les élèves à retrouver le principe de la base 10. L'écriture 41 053 en base 10 a pour signification, en français : 4 dizaines de milliers + 1 millier + 0 centaine + 5 dizaines + 3 unités.
Ce qui peut aussi s'écrire en utilisant les puissances de 10 : $41\,053 = 4 \times 10^4 + 1 \times 10^3 + 0 \times 10^2 + 5 \times 10^1 + 3 \times 10^0$ ou $41\,053 = 4 \times 10^4 + 1 \times 10^3 + 0 \times 10^2 + 5 \times 10 + 3$.
– Faire décrire ce nombre en n'utilisant que le mot dizaine (4 dizaines de dizaines de dizaines de dizaines + 1 dizaine de dizaines de dizaines + 0 dizaine de dizaines + 5 dizaines + 3 unités) peut être une bonne manière d'aider les élèves à se remémorer la notion de groupements successifs.
– Pour introduire le travail sur les bases autres que 10, la démarche suivante peut être suivie :



• Proposer de trouver l'écriture d'une collection de croix comme ci-dessous en prenant comme règle de groupement, non plus dix, mais par exemple cinq, en s'y prenant comme le feraient des enfants d'un pays où on compterait de cette manière. En référence avec notre système, les élèves doivent retrouver le principe des groupements successifs, la nécessité de cinq chiffres, de 0 à 4.
En groupant par cinq, on obtient 17 paquets et il reste 2 unités. Exprimé sous la forme de puissances de 5 : $3 \times (5 \times 5) + 2 \times 5 + 2$ ou $3 \times 5^2 + 2 \times 5^1 + 2$.
En recommençant l'opération de groupement, on obtient 3 paquets de 5×5 objets et il reste 2 paquets de 5 non groupés. Écrit en base 5 : $(322)_{\text{cinq.}}$
• À partir de l'écriture d'un nombre dans une base quelconque, il est facile de retrouver son écriture en base 10 en revenant au sens de l'écriture.
Par exemple : $(1076)_{\text{huit}} = 1 \times 8^3 + 0 \times 8^2 + 7 \times 8^1 + 6 = 512 + 56 + 6 = 574$.

- Réciproquement, à partir d'un nombre dont l'écriture est donnée en base 10, on peut élaborer un algorithme permettant de trouver son écriture en base 8.
  Une stratégie possible : interpréter en terme de divisions euclidiennes successives le type de travail réalisé sur la collection, ce qui donne pour l'écriture de 574 en base 8 :

$574 = 8 \times 71 + 6$	$71 = 8 \times 8 + 7$	$8 = 8 \times 1 + 0$	$1 = 8 \times 0 + 1$

Cet algorithme peut être décrit dans un premier temps par les élèves dans un langage courant (voir la partie « Algorithmes »).
Une autre stratégie :
$8^2 = 64$
$8^3 = 512$
$8^3 < 574 < 84$
$574 = 1 \times 8^3 + 62$
$62 = 0 \times 8^2 + 62$
$62 = 7 \times 8 + 6$
$574 = (1076)_{\text{huit}}$

Le jeu des envahisseurs

Ce jeu permet d'avoir un autre point de vue sur la décomposition des nombres selon les puissances de la base. Il s'agit d'une activité de recherche à mener en groupes.
Il s'agit de générer la suite des nombres à partir de 1, par addition répétée de « générateurs » à découvrir, en nombre minimum, quand le nombre maximal de répétitions est fixé. Par exemple, quels générateurs choisir pour obtenir par addition de ces générateurs tous les nombres entre 1 et 80, en ne pouvant les répéter que deux fois au maximum ?
La recherche est menée en plusieurs temps et peut se faire sous forme d'un concours entre groupes d'élèves.

Jeu 1

Travail par groupes de quatre et concours de vitesse entre les membres du groupe. Dans cette première phase, il s'agit seulement de permettre aux élèves de comprendre le support du jeu 2.
Une bande de 30 cases, numérotées de 1 à 30, est distribuée à chaque joueur.
Consigne : « En utilisant au plus deux fois les nombres 2, 3, 5 (appelés les envahisseurs), l'addition et la multiplication, essayez d'envahir le plus de cases possibles, dans le temps limité qui vous est imparti. Pour chacune des cases envahies, justifiez qu'elle peut l'être par une écriture. »
Ainsi 9 peut être envahi, car $9 = 5 + 2 + 2$; 26 aussi, car $26 = 3 \times (5 + 3) + 2$.

Jeu 2

Consigne : « On veut maintenant envahir toutes les cases de la bande 1-80 en n'utilisant que l'addition et en répétant deux fois au plus chaque nombre de la liste des envahisseurs. Proposez, par groupe, une liste d'envahisseurs répondant à ces contraintes, comportant le moins possible d'éléments. »
L'activité se déroule en trois temps :
– recherche par groupes pendant un temps limité ;
– comparaison des listes, explicitation des démarches ;
– comment compléter cette liste (toujours avec le moins d'envahisseurs possible) pour atteindre toutes les cases jusqu'à 2 000 ?
La solution experte de ce deuxième jeu consiste à partir de 1 ; on obtient 1 + 1, puis on ne peut plus avancer ; on ajoute donc 3, ce qui permet d'envahir 3 + 1, 3 + 1 + 1, 3 + 3, 3 + 3 +1, 3 + 3 +1 + 1, puis on est bloqué de nouveau ; il faut donc ajouter 9 aux envahisseurs. Le lecteur pourra vérifier qu'on envahit alors jusqu'à 26, et qu'il faut ajouter 27 (tiens donc ! 1, 3, 9, 27…) ; et qu'avec 27 on envahit alors jusqu'à 80, et qu'on serait bloqué au-delà…
On peut aussi vérifier que toute autre solution, en particulier celle qui consiste à partir de 80 et à diviser par 2, donne un plus grand nombre d'envahisseurs et qu'elle est donc perdante par rapport à la précédente.

Le concept sous-jacent à ce jeu est la numération en base 3, ce qu'on découvre en identifiant les envahisseurs ; en effet un nombre peut être envahi si on peut l'écrire à l'aide des puissances de trois. La contrainte « ne pas répéter un envahisseur plus de deux fois » correspond au fait que le chiffre d'un ordre donné ne peut pas dépasser 2.

Jeu 3

C'est le même jeu que précédemment, mais on doit envahir tous les nombres jusqu'à 2 000 et on peut répéter jusqu'à neuf fois un envahisseur… Il s'agit bien sûr de la numération en base 10, et au-delà, d'un jeu réflexif qui fait prendre conscience au joueur, si ce n'est déjà fait, qu'il est en train de manipuler les bases de numération.

À propos des critères de divisibilité [■ Logique]

Il ne s'agit pas de démontrer ces critères sur un nombre quelconque à p chiffres. En revanche les élèves doivent en avoir saisi les principes et doivent aussi être capables d'en fournir la démonstration sur un exemple générique comme le suivant : un nombre n s'écrivant dans le système décimal avec quatre chiffres peut se mettre sous la forme : $a \times 1\,000 + b \times 100 + c \times 10 + d$, où a, b, c et d sont éléments de $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$.
1 000 et 100 sont des multiples de 4, mais pas 10. Pour que n soit divisible par 4, il suffit que $c \times 10 + d$ soit un multiple de 4.
Conclusion : quel que soit n un nombre entier à quatre chiffres dont le chiffre des unités est d et le chiffre des dizaines c, si le nombre $10c + d$ est un multiple de 4, alors N est un multiple de 4.
Lorsque cette étude sera reprise en utilisant les congruences en classe terminale, les élèves pourront écrire : $10^2 \equiv 0(4)$ donc $N \equiv 10c + d(4)$.
Le questionnement sur le critère de divisibilité par deux permet de revenir sur la différence entre les propriétés des nombres et la façon dont elles se traduisent dans leurs écritures. En base 10, un nombre pair se reconnaît tout de suite à son chiffre des unités. Il suffit d'écrire le nombre quatre en base 3 pour s'apercevoir que ce n'est plus vrai puisqu'il s'écrit 11. La propriété de parité caractérise le nombre et non son écriture.
Une activité de recherche intéressante peut être proposée en exercice : comment reconnaît-on un nombre pair quand il est écrit en base 3, en base 2 ?

Exemples d'exercices sur la numération

Exercices faisant intervenir des bases autres que 10

1) Donner l'écriture chiffrée du nombre $1 + 3 + 3^2 + 3^4 + 3^6$ en base 3 et déterminer son écriture en base 9.
2) Trouver l'écriture chiffrée du nombre $5 \times (5 \times (5 \times (5 + 4) + 3) + 2) + 1$ en base 5.
3) écrire la suite des vingt premiers nombres en base 4
4) En base 12, on désigne par A le chiffre correspondant à 10, par B celui correspondant à 11 ; écrivez la suite des vingt successeurs de $\overline{\text{BA9}}$.
5) Calculer $(2510)_{\text{six}} + (4253)_{\text{six}}$.
6) En informatique, une information est souvent stockée sous la forme d'un octet, c'est-à-dire de huit informations élémentaires (0 ou 1).
Par exemple, l'information suivante : 1 0 1 0 0 0 0 0 signifie le nombre 160.
– Quel est le plus grand nombre que l'on puisse coder en base 2 sur un octet ?
– Se servir de ce qui précède pour déduire l'écriture en base 10 de ce nombre : 0 1 0 1 1 1 1 1.
– Quel est son prédécesseur ? son successeur ? (Écriture en base 2.)
– Construire les tables d'addition et de multiplication en base 2.
7) Pour écrire un nombre dans la base 16, on utilise les chiffres 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E et F :
– écrire en base 16 la suite des nombres entre 250 et 260 ;
– trouver l'écriture chiffrée du nombre $(4^3 - 1) \times (4^3 + 1)$ en base 16 ;
– comment s'écrit le nombre $(\text{A3B})_{\text{seize}}$ en base 2 ? de manière plus générale, comment passer de l'écriture d'un nombre en base 16 à son écriture en base 2 ?

Exercices portant sur la numération décimale faisant appel à la décomposition d'un nombre suivant les puissances de 10

1) Je suis un nombre entier à quatre chiffres. Si vous échangez mes deux chiffres les plus à droite, j'augmente de 27. Si vous échangez ceux de gauche, je diminue de 5 400. Si vous échangez ceux du milieu, j'augmente de 90. Pouvez-vous me trouver ?

2) Étant donné trois chiffres quelconques, a, b et c ($a \neq c$). On considère le nombre de trois chiffres $\overline{abc}$. On permute les chiffres extrêmes ; soit $\overline{cba}$, on retranche le plus petit du plus grand : on obtient un nombre $\overline{xyz}$ et on lui ajoute le nombre obtenu en permutant les chiffres extrêmes soit $\overline{xyz} + \overline{zyx}$.

On obtient toujours … Pourquoi ?

3) Soit un nombre de trois chiffres $\overline{xyz}$. Le réécrire à droite du premier pour former un nombre de six chiffres, $\overline{xyzxyz}$. Diviser ce nombre par 7, puis le quotient par 11, puis le nouveau quotient par 13. On obtient comme dernier quotient … Pourquoi ?

4) Ranger dans l'ordre croissant tous les nombres que l'on peut former à l'aide des chiffres 5, 0, 6 et 8 (chaque chiffre est utilisé au plus une fois).

5) Déterminer les nombres entiers de trois chiffres, divisibles par 3, vérifiant les deux propriétés suivantes :

– le chiffre des dizaines est égal à 2 ;

– pour chacun de ces nombres, la différence entre le nombre considéré et celui obtenu par permutation du chiffre des centaines et du chiffre des unités est égale à 198.

6) Le nombre 2 005 est-il divisible par 11 ? Dans combien d'années aura-t-on une année divisible par 11 ? par 9 ? par 99 ? etc.

7) Proposer un critère de divisibilité par 33 et par 99, par 18, par 20, par 180. (Un critère possible pour ce dernier exemple : « Il doit se terminer par 0, être divisible par 9 et divisible par 4. »)

Divers [■ Logique]

Une des récréations mathématiques proposées dans le livre *Sur le sentier des mathématiques*, dans le chapitre « Mathématiques sans calcul » est la suivante :

« Le produit de quatre nombres entiers consécutifs est égal à 3 024. Trouver ces nombres.

Un schéma de réflexion est proposé.

1) Établir qu'aucun des nombres cherchés n'est égal à 10.

2) Établir qu'il doit y avoir parmi eux des nombres inférieurs à 10.

3) Déduire de l'hypothèse, des points 1 et 2, que tous les nombres cherchés sont inférieurs à 10.

4) Établir qu'aucun des nombres cherchés n'est égal à 5.

5) Diviser en deux groupes les nombres à un chiffre qui restent possibles et déterminer lequel des deux satisfait aux conditions de l'énoncé.

Rédiger le raisonnement attendu pour chaque étape, en respectant l'esprit du titre du chapitre, c'est-à-dire en s'abstenant d'utiliser des calculs écrits. »

Entiers naturels et nombres premiers

Arithmétique et argumentation mathématique. [■ Logique]

Le travail sur les entiers naturels permet d'initier la réflexion sur l'argumentation mathématique, sur des contenus bien maîtrisés par les élèves. En voici un exemple.

– Écrire la liste des carrés parfaits des naturels jusqu'à 30.

– Quels sont les nombres dont les carrés sont pairs ? Quels sont ceux dont les carrés sont impairs ?

– Et si on continue après 30 ?

Le travail par liste avec un tableur est possible, la recherche est facile, et les élèves auront très vite des convictions. Avant de poser la question de la généralisation, on peut leur demander de se prononcer sur la vérité des propositions suivantes :

– N'importe quel nombre pair inférieur à 30 a un carré pair.

– Certains carrés impairs inférieurs à 900 sont le carré de nombres pairs.

– Tous les carrés pairs inférieurs à 900 sont le carré de nombres pairs.

– Certains nombres impairs inférieurs à 30 ont un carré qui est pair.

– Il y a des nombres impairs inférieurs à 30 dont le carré est pair.

On peut aussi demander aux élèves de produire, par petits groupes, et en les justifiant, des propositions vraies à propos de leur recherche, puis des propositions fausses, ce qui est évidemment plus difficile.
La question du domaine de validité le plus large possible peut conduire les élèves à expérimenter sur des listes plus grandes, ce qui est peu coûteux avec le tableur. Il est nécessaire de sortir de cette démarche expérimentale pour poser la question d'une démonstration générale : « Le carré d'un nombre pair quel qu'il soit est-il obligatoirement pair ? Et pour un nombre impair ? »
La démonstration la plus accessible est celle qui utilise le chiffre des unités du nombre dont on calcule le carré. Celle qui utilise le calcul du carré de $2n$, puis de $2n + 1$, où n est entier naturel, est plus difficile et moins convaincante pour les élèves. Une autre possibilité est d'amorcer des observations sur le passage d'une ligne à l'autre dans la liste des carrés : le tableur permet de construire la liste des différences, qui est celle des entiers impairs. Seul un calcul algébrique permet de justifier qu'on passe toujours d'un carré à l'autre de cette manière, mais cette certitude permet ensuite d'amorcer, sans formalisation, un raisonnement de type récurrence : puisque le premier carré 1 est impair, en lui ajoutant un impair, le résultat, qui est le carré de 2 est forcément pair ; en lui ajoutant un impair pour obtenir le carré de 3, le résultat du carré suivant est impair, et ainsi de suite. Ce qui montre l'alternance carré pair/carré impair et établit les deux résultats visés (et même leur réciproque).
Selon la façon dont le travail est conduit, la question de la réciproque peut se poser : « Un carré qui est pair provient-il forcément d'un nombre pair ? Et pour un carré qui est impair ? »
Pour y répondre, on peut mettre en forme un raisonnement par l'absurde assez accessible. Le fait qu'il soit bref est un atout pour la compréhension de cette méthode de raisonnement.

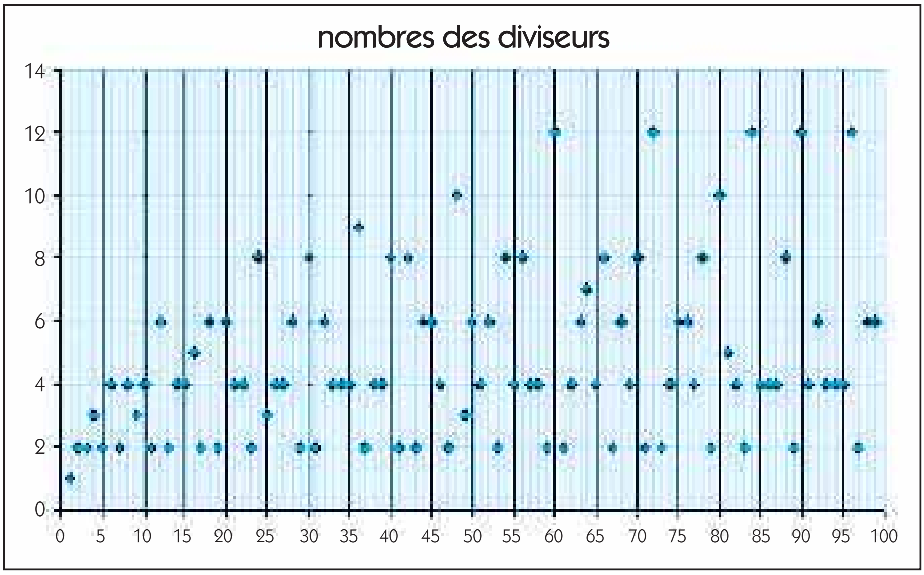
De la notion de diviseur à celle de nombre premier [■ Algorithmique]

S'intéresser au nombre de diviseurs d'un entier naturel permet, comme l'ont fait les mathématiciens grecs de l'Antiquité, de partir à la découverte des propriétés de certains entiers telles que « être un nombre premier », « être un carré parfait », etc.
Les élèves ont déjà eu, en classe de troisième, l'occasion de lister tous les diviseurs d'un nombre en ayant quelques divisions à effectuer.
La possibilité de déléguer à un ordinateur la tâche répétitive qui consiste à tester systématiquement toutes les divisions d'un entier naturel N par tous les entiers naturels qui lui sont inférieurs ou égaux permet de traiter des nombres beaucoup plus grands.
Il est possible de demander aux élèves d'élaborer un algorithme permettant de constituer la liste de tous les diviseurs et le nombre de diviseurs d'un nombre entier naturel.

Algorithme permettant de trouver la liste de tous les diviseurs d'un entier n et le nombre p de ces diviseurs
Algorithme en langage naturel Entrer la valeur n, la liste L vide, et l'entier $p = 0$ Pour $k = 1$ jusqu'à $k = n$ Si k divise n, alors – ajouter k dans la liste L – ajouter 1 à p Passer à la valeur suivante de k Afficher la liste L et la valeur de p.
On peut améliorer sensiblement l'efficacité de cet algorithme en observant que les diviseurs vont deux par deux, sauf l'un d'entre eux dans l'éventualité où n est un carré.

Algorithme plus complexe permettant aussi de trouver tous les diviseurs d'un entier n et le nombre de ces diviseurs
Entrer la valeur n, la liste L vide, et l'entier $p = 0$ Pour $k = 1$ jusqu'à $k = E(\sqrt{n})$-1 Si k divise n, alors – ajouter k et $\frac{n}{k}$ à la liste L – ajouter 2 à p Passer à la valeur suivante de k. Si $E(\sqrt{n})=\sqrt{n}$ alors – ajouter $\sqrt{n}$ à la liste L – ajouter 1 à p – afficher la liste L et la valeur de p.

Le graphique ci-dessous représente le nombre de diviseurs des entiers naturels de 1 à 99.



– Comment appelle-t-on les nombres qui n'ont que deux diviseurs ?
– Quelle est la particularité des nombres qui ont un nombre impair de diviseurs ?
– Quelle conjecture peut-on faire ?
La validation de la conjecture s'appuie sur des connaissances sur les nombres premiers. Elle pourra être abordée après l'étude de ce chapitre.

Les nombres premiers

La définition d'un nombre premier est au programme de la classe de seconde. Citer quelques nombres premiers ne doit pas poser de problème aux élèves. En revanche ils ne disposent sans doute pas d'une stratégie permettant de déterminer tous les nombres premiers inférieurs à un nombre donné et n'ont pas non plus de stratégie efficace pour déterminer si un nombre donné est ou n'est pas premier. La résolution de ce problème peut être l'occasion de travailler logique [■] et algorithmique [■].
Une démarche possible pour faire découvrir aux élèves la méthode d'élimination connue sous le nom de crible d'Ératosthène peut consister :
– dans un premier temps à demander aux élèves d'expliquer pourquoi dans la recherche de tous les nombres premiers inférieurs ou égaux à un nombre donné (on peut commencer par exemple avec 100), on peut déjà éliminer tous les multiples des nombres premiers déjà connus ;
– ensuite à leur faire prouver que, n étant un entier naturel :
• si n est non premier, alors il admet un diviseur premier (son plus petit diviseur propre) ;

- si n est non premier alors il existe un nombre premier a qui divise n et qui est tel que $a^2 \leqslant n$;
- si, pour tout nombre premier a, a ne divise pas n ou $a^2 > n$ alors n est premier.

La démonstration peut être initiée par la question suivante : pourquoi sommes-nous sûrs d'avoir trouvé tous les nombres premiers inférieurs à n dès que l'on a barré les multiples des nombres entiers compris entre 1 et $\sqrt{n}$? Avons-nous bien barré tous les nombres composés inférieurs ou égaux à n ?
Raisonnons par l'absurde : s'il en restait un non barré, appelons le a, on aurait alors $a = bc$ avec b et c entiers supérieurs à $\sqrt{n}$ mais $b > \sqrt{n}$ et $c > \sqrt{n} \Rightarrow bc > n$ ce qui est impossible car a est plus petit que n.
Conséquences :
– Pour connaître par exemple tous les nombres premiers inférieurs ou égaux à 100, il suffit de rayer tous les multiples de 2, 3, 5 et 7.
– Pour savoir si un nombre entier naturel n est premier, il suffit de disposer de la liste L de tous les nombres premiers inférieurs ou égaux à et $\sqrt{n}$ de tester si n est ou non divisible par tous les nombres de liste L.
Les mathématiciens ont longtemps cherché un moyen de trouver tous les nombres premiers. Or l'ensemble des nombres premiers est infini. Le programme préconise que ce théorème soit démontré ce qui donne une autre occasion de faire une démonstration par l'absurde.

Quelques repères historiques à propos des nombres premiers

La liste suivante évoque quelques résultats de mathématiciens qui ont cherché des formules permettant de générer des nombres premiers (et on cherche toujours).
- **Pierre de Fermat** (1601-1665) a affirmé que les nombres qui s'écrivent « $2^{2^n} + 1$ » sont tous premiers mais Euler a prouvé que, pour $n = 5$, le nombre 4 294 967 297 est divisible par 641.
- **Leohnard Euler** (1707-1783) a trouvé que « les nombres qui s'écrivent sous la forme $n^2 + n + 41$ avec n entier naturel quelconque compris entre 0 et 39 sont premiers ».
- **Christian Goldbach** (1690-1764) a conjecturé que « tout nombre entier pair supérieur à 2 s'écrit comme somme de deux nombres premiers ». La conjecture de Goldbach n'est toujours pas prouvée.
- **Marin Mersenne** (1588-1648) a introduit les nombres qui portent son nom à l'occasion de ses recherches sur les nombres parfaits. Ce sont les nombres qui s'écrivent sous la forme $M_p = 2^p - 1$ avec p entier naturel.

Mersenne savait que : « Si M_p est premier alors p est premier. » On peut faire vérifier aux élèves que la réciproque est fausse (contre-exemple : M_{11} n'est pas premier).
La recherche des nombres de Mersenne qui sont premiers continue encore aujourd'hui, on en trouve chaque année de nouveaux.
Même des non-mathématiciens se sont intéressés aux nombres premiers : Marcel Pagnol a fait la proposition suivante (qui est fausse !) : « Si n et $n + 2$ sont deux nombres impairs alors $n + (n + 2) + n(n + 2)$ est un nombre premier. »

Décomposition d'un nombre en produit de facteurs premiers [■ Algorithmique]

L'objectif de ce programme ne consiste pas à faire avec les élèves de L un exposé théorique, ni de se contenter de faire utiliser des résultats en gommant les problèmes sous-jacents. En particulier, le problème de l'existence, qui ne peut être résolu dans le cas général, doit être posé clairement aux élèves.
Les élèves savent déjà produire pour quelques nombres donnés une telle décomposition. Mais est-on sûr qu'on pourrait le faire pour n'importe quel nombre ?
Pour sensibiliser au problème de l'existence d'une telle décomposition on peut présenter un algorithme qui permet d'obtenir une telle décomposition, quel que soit le nombre donné initialement. Cet algorithme est complexe. Il repose sur la connaissance de tous les nombres premiers inférieurs ou égaux à un nombre n. On ne demande pas aux élèves de l'élaborer par eux-mêmes mais de comprendre ce qu'il produit.

Algorithme

Algorithme écrit en langage naturel
Entrer la valeur de n, la liste $\{p_1 ; p_2 \dots p_k\}$ des nombres premiers inférieurs ou égaux à n, la liste L est vide et l'entier m est égal à 1.

Test n° 1
N est-il divisible par p_m ?

Si oui

- entrer p_m dans la liste L
- **Test n° 2 :** $\dfrac{N}{p_m}$ est-il supérieur strictement à 1 ?

  si oui remplacer N par $\dfrac{N}{p_m}$
  recommencer le test n° 1
  si non aller à l'affichage

Si non

- ajouter 1 à m
- recommencer le test n° 1

Afficher la liste L.

Quelques activités sur les nombres entiers et leurs diviseurs, utilisant leur décomposition en produit de facteurs premiers

Existe-t-il des carrés d'entiers qui soient le double d'autres carrés d'entiers ? [■ Logique]

La recherche peut se faire à partir des listes de carrés des entiers, jusqu'à 30 ou 50, en utilisant éventuellement le tableur.

Le problème rencontré par les élèves est qu'ils ne trouvent pas d'entiers qui satisfont à la condition donnée. La seule issue est de formuler un « candidat théorème » qui serait : « Aucun carré parfait n'est le double d'un autre carré parfait. »

Il existe plusieurs démonstrations de ce résultat, qui revient à prouver l'irrationalité de $\sqrt{2}$. L'une des plus accessibles dans le cadre du programme d'arithmétique proposé est d'utiliser la décomposition en produit de facteurs premiers d'un carré d'entier, dont tous les exposants sont forcément pairs et sont les seuls à l'être.

Un raisonnement par l'absurde peut alors être construit : s'il existait deux entiers p et q tels que $p^2 = 2q^2$, la décomposition en produit de facteurs premiers de $2q^2$, c'est-à-dire de p^2 comporterait un exposant impair, celui du facteur 2, ce qui rend impossible le fait que p^2 soit pair. Ce raisonnement par l'absurde s'appuie sur un résultat intermédiaire, sur lequel on peut choisir de faire travailler les élèves : les carrés d'entiers admettent tous une décomposition dont tous les facteurs premiers ont un exposant pair, et ce sont les seuls.

Énoncé proposé pour ce résultat intermédiaire : « Décomposer en produit de facteurs premiers les carrés parfaits jusqu'à celui de 20. Trouver une propriété commune à toutes ces décompositions. Et si on dépasse le carré de 20 ? Un nombre est donné par sa décomposition en produit de facteurs premiers, peut-on savoir si c'est un carré parfait ? »

Trouver tous les diviseurs d'un nombre entier, et les dénombrer

Il est important de faire remarquer aux élèves que disposer de la décomposition en produit de facteurs premiers d'un nombre donne une méthode qui permet de générer tous les diviseurs d'un nombre et de dénombrer l'ensemble des diviseurs de ce nombre sans avoir pour autant besoin de lister tous ces diviseurs.

Le théorème utilisé est : « n et d étant deux entiers naturels. d est un diviseur de n si et seulement si la décomposition en produit de facteurs premiers de d ne comporte que les diviseurs premiers de n, chacun d'entre eux étant élevé à une puissance inférieure ou égale à la puissance correspondante de ce facteur dans la décomposition de n. »

Ce théorème n'est pas à démontrer dans toute sa généralité, mais la preuve à propos d'un exemple générique peut être proposée, par exemple : comment générer tous les diviseurs de 180 ?

$180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$.

Soit d un diviseur de 180. d se décompose, de façon unique, en un produit de facteurs premiers. Si p est un diviseur premier de d, comme d divise n, p divise aussi n.

Donc l'ensemble de diviseurs premiers de d est inclus dans l'ensemble des diviseurs premiers de n.

d s'écrit donc nécessairement sous la forme $2^a \times 3^b \times 5^c$.

Pourrait-on avoir par exemple $a > 2$? Autrement dit peut-il exister un entier naturel k tel que $2^2 \times 3^2 \times 5 = k \times 2^a \times 3^b \times 5^c$ avec $a > 2$?

On obtiendrait $3^2 \times 5 = k \times 2^a \times 3^b \times 5^c$. Or la liste des diviseurs premiers de $3^2 \times 5$ est {3 ; 5}, celle de $k \times 2^{a-2} \times 3^b \times 5^c$ contient l'ensemble {2 ; 3 ; 5}. On aurait pour un même nombre deux décompositions différentes en produit de facteurs premiers ce qui est absurde.

Conclusion 1 : un diviseur de 180 s'écrit nécessairement sous la forme $2^a \times 3^b \times 5^c$, avec $0 \leqslant a \leqslant 2$; $0 \leqslant b \leqslant 2$ et $0 \leqslant c \leqslant 1$.

Réciproquement, si on prend $0 \leqslant a \leqslant 2$; $0 \leqslant b \leqslant 2$ et $0 \leqslant c \leqslant 1$ on peut écrire : $180 = (2^a \times 3^b \times 5^c) \times (2^{2-a} \times 3^{2-b} \times 5^{1-c})$ et $2^{2-a} \times 3^{2-b} \times 5^{1-c}$ est un entier naturel.

Conclusion 2 : l'ensemble des diviseurs de 180 est l'ensemble des nombres qui s'écrivent sous la forme $2^a \times 3^b \times 5^c$ avec $0 \leqslant a \leqslant 2$, $0 \leqslant b \leqslant 2$ et $0 \leqslant c \leqslant 1$.

Élaborer l'arbre des diviseurs permet à la fois une représentation concrète de tous les diviseurs d'un entier N et de dénombrer ces diviseurs.

Même si le nombre à traiter est trop grand pour que l'arbre puisse être réalisé de façon complète, en maîtriser le principe permet de justifier le résultat suivant : « Si la décomposition en facteurs premiers de N s'écrit : $N = p_1^a \times p_2^b \times p_3^c$, alors le nombre des diviseurs de N est $(a + 1)(b + 1)(c + 1)$. »

La formule générale n'est pas un exigible du programme, mais les élèves doivent être capables, pour un nombre dont la décomposition est donnée, de déterminer le nombre de ses diviseurs.

Pour aller plus loin… [■ Logique]

– Soit n l'entier naturel dont la décomposition en produit de nombres premiers est $n = 2^p \times 3^q$, déterminer les valeurs de n sachant que $12n$ a le double de diviseurs de n.

Le nombre de diviseurs de $n = 2^p \times 3^q$ est $(p + 1)(q + 1)$.

Le nombre $12n$ s'écrit $2^2 \times 3 \times 2^p \times 3^q$ donc $12n = 2^{p+2} \times 3^{q+1}$.

Et le nombre de diviseurs de $12n$ est $(p + 2 + 1)\ (q + 1 + 1)$

Déterminons à présent n.

On sait que $(p + 3)(q + 2) = 2(p + 1)(q + 1) \iff 4 + q = pq$
$\iff q(p - 1) = 4$.

Les nombres entiers q et $p - 1$ sont tels que leur produit fait 4 donc :

- ou bien $q = 1$ et $p = 5$;
- ou bien $q = 2$ et $p = 3$;
- ou bien $q = 4$ et $p = 2$.

Les nombres 96, 72, 324 sont les solutions cherchées.

– Existe-t-il des nombres plus petits que 200 qui ont 18 diviseurs ?

Cet exemple utilise le raisonnement par disjonction des cas.

$N = p_1^{\alpha} \times p_2^{\beta} \times p_3^{\delta} \ldots$

On doit donc avoir $(\alpha + 1)(\beta + 1)(\delta + 1)\ldots = 18$, cela revient à chercher les écritures de 18 en produit d'entiers.

- ou bien $\alpha + 1 = 18$ mais $2^{17} > 200$;
- ou bien $\alpha + 1 = 9$ et $\beta + 1 = 2$ alors $N = 2^8 \times 3$ qui est plus grand que 200 ;
- ou bien $\alpha + 1 = 6$ et $\beta + 1 = 3$ alors $N = 2^5 \times 3^2$ qui est plus grand que 200 ;
- ou bien, au mieux $\alpha + 1 = 3$, $\beta + 1 = 2$ et $\delta + 1 = 3$, dans ce cas $N = 2^2 \times 3 \times 5^2$ qui est également plus grand que 200.

– Montrer que si un entier n admet un nombre impair de diviseurs alors c'est un carré parfait.

Si un entier naturel n a un nombre impair de diviseurs alors le produit $(a + 1)(b + 1)(c + 1)\ldots$

est un nombre impair ; or pour qu'un produit de nombres entiers soit impair tous les facteurs doivent être impairs.
Pour que, par exemple, $a + 1$ soit impair il est nécessaire que a soit pair.
La décomposition de l'entier n en produit de facteurs premiers montre alors que le nombre n est bien un carré.
Une autre méthode consiste à remarquer que les diviseurs vont toujours par deux : les paires de nombres entiers dont le produit est égal à l'entier n ; or si le nombre de diviseurs est impair il y en reste un qui est tout seul : c'est celui qui multiplié par lui-même est égal au nombre n, mais multiplié par lui-même signifie qu'on l'élève au carré !

Diviseurs communs à deux entiers naturels

Comme les élèves disposent à présent d'une stratégie permettant de générer tous les diviseurs de A et tous les diviseurs de B, ils peuvent trouver que les diviseurs communs à A et B s'obtiennent en multipliant entre eux les facteurs premiers communs aux décompositions de A et de B, chacun de ces facteurs étant élevé à une puissance au plus égale à la plus petite des puissances de ce facteur dans chacune des décompositions des nombres A et B.
Le PGCD de A et B est le plus grand élément de la liste. Sa décomposition respecte la propriété ci-dessus.
Le théorème : « Un entier naturel est un diviseur commun à A et à B si et seulement s'il divise le PGCD de A et de B » peut facilement être démontré en s'appuyant sur la propriété ci-dessus.

Bibliographie

– Delahaye Jean-Paul, *Merveilleux nombres premiers,* Belin, 2000, coll. « Pour la science ».
– Ifrah Georges, *Les Chiffres ou l'Histoire d'une grande invention*, Laffont Robert, 1985.
– A. Kordiemsky Boris, *Sur le sentier des mathématiques*, 2 vol., Dunod, 1963.
– Suratteau Daniel, Hauchecorne Bertrand, *Des mathématiciens de A à Z*, Ellipses, 1996.

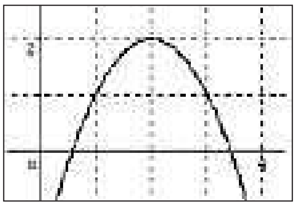
De très nombreux sites, qu'il est impossible de citer, proposent des informations sur l'histoire des numérations, sur les nombres premiers, etc.
Un texte comportant des informations complémentaires sur les numérations dont un bref panorama de l'histoire des numérations, est fourni sur le cédérom, sous le titre « Quelques compléments à propos de numération ».

Analyse – classe de première

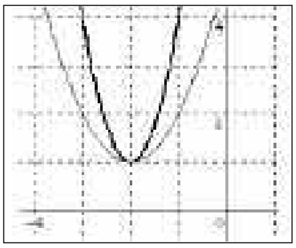
Transformations algébriques

On veillera à limiter le temps passé sur ces transformations d'expressions algébriques qui ne sont à travailler en classe de première que sur des exemples numériques simples. Il peut être intéressant de ne pas concentrer l'entraînement proposé sur ce point mais de choisir plutôt d'y revenir régulièrement. Le travail à réaliser prolonge celui réalisé en seconde et consiste essentiellement à exploiter les informations données par les courbes obtenues avec une calculatrice graphique ou un traceur de courbes.

Dans le cas d'une fonction polynôme du second degré

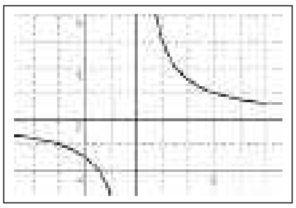


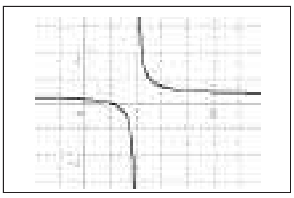
Il s'agit d'exploiter par exemple la lecture graphique des coordonnées (α, β) du sommet et l'allure de la parabole pour transformer l'écriture de $ax^2 + bx + c$ sous la forme $a(x - \alpha)^2 + \beta$. L'allure de la courbe incite à tenter d'écrire $-x^2 + 4x - 2$ sous la forme : « 2 moins un carré qui s'annule en 2. » Il est donc naturel de considérer l'expression $2 - (x - 2)^2$. Un calcul permet d'être sûr que, quel que soit le nombre réel x, les deux formules $-x^2 + 4x - 2$ et $2 - (x - 2)^2$ donnent toujours le même résultat.



L'allure de la courbe incite à tenter d'écrire $3x^2 + 12x + 13$ sous la forme : « 1 plus un carré qui s'annule en -2. »
$1 + (x + 2)^2$ ne convient pas. Mais, vu le coefficient en x^2, essayer $1 + 3(x + 2)^2$ semble logique.
Un calcul permet d'être sûr que, pour tout nombre réel x, $1 + 3(x + 2)^2 = 3x^2 + 12x + 13$.
D'autres démarches sont envisageables et peuvent venir naturellement au fur et à mesure de l'avancée du programme. Par exemple, lorsque la fonction dérivée est disponible, l'écriture du polynôme sous la forme $\alpha(x - \alpha)^2 + \beta$ peut se déduire de la connaissance des coordonnées (α, β) du sommet de la parabole. On peut aussi, parallèlement à ce travail sur les courbes, proposer une méthode algébrique plus classique.
Mais la maîtrise complète par l'élève de ces transformations tant dans le cadre géométrique qu'algébrique, n'est pas un objectif du programme. La transformation de $ax^2 + bx + c$ dans le cas général sera exposée brièvement de sorte qu'en fin de cycle terminal les élèves puissent être capables de résoudre une équation du second degré en mobilisant, lorsque cela se révèle indispensable, les formules utilisant le discriminant. Toutefois la classification des fonctions polynômes du second degré n'est pas un objectif du programme et le temps consacré à ce type de fonctions doit être limité.

Dans le cas d'une fonction homographique





Pour f, telle que $f(x) = \dfrac{2x-1}{x-2}$, l'image de x, qui est $\dfrac{2x-1}{x-2}$ semble graphiquement ne jamais prendre la valeur 2, on peut le vérifier si nécessaire en résolvant l'équation correspondante. On peut donc avoir l'idée d'écrire cette expression algébrique sous la forme : « 2 plus quelque chose qui ne s'annule pas. »
Or, pour tout nombre réel distinct de 2, $f(x) - 2 = \dfrac{3}{x-2}$, d'où la transformation souhaitée.
Lorsque $f(x) = \dfrac{x-1}{3x-6}$ la lecture est plus délicate.
Mais il est possible d'écrire $\dfrac{x-1}{3x-6} = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{x-1}{x-2}$ et constater graphiquement $\dfrac{x-1}{x-2}$ semble ne jamais prendre la valeur 1. On peut le vérifier en résolvant l'équation correspondante.
Le calcul de $\dfrac{x-1}{x-2} - 1$ permet finalement d'écrire $f(x) = \dfrac{1}{3} \times \left(\dfrac{1}{x-2} + 1\right)$.

La transformation des expressions algébriques et la résolution d'équations offrent une occasion pertinente de travailler avec les élèves les différents sens du symbole égalité et d'expliciter les quantifications, universelle ou existentielle, sous-jacentes. [■ Logique]

Effet de certaines fonctions sur l'ordre

On gardera l'esprit voulu par le programme de seconde.
Une fonction croissante sur un intervalle est une fonction qui conserve l'ordre.
Ainsi, par exemple, la transformation de $\frac{2x-1}{x-2}$, sous la forme $2+\frac{3}{x-2}$ et la connaissance du sens de variation des fonctions de référence $x \mapsto x-2$, $x \mapsto \frac{1}{x}$ et $x \mapsto 3x+2$ permettent d'obtenir le sens de variation de la fonction $x \mapsto \frac{2x-1}{x-2}$ sur $]-\infty\ ;2[$ et sur $]2\ ;+\infty[$.
C'est de la même manière que, en fin de cycle terminal, les élèves pourront déduire les variations de fonctions de la forme $x \mapsto \ln(u(x))$ ou $x \mapsto \exp(u(x))$ de la connaissance des variations de la fonction u sanavoir recours à la dérivation de la fonction composée.

Dérivation

Le programme préconise de donner durant l'année plusieurs visions du nombre dérivé, la cohérence entre ces différentes visions doit être mise en évidence.

Vision cinématique

Le compteur d'une voiture indique la vitesse instantanée du véhicule à chaque instant et cette vitesse varie en fonction du temps. On peut parcourir une distance de 10 km à la vitesse moyenne de 45 km.h^{-1} bien que la vitesse ne soit pas constante tout au long du trajet.
Problème : Comment trouver la vitesse instantanée quand on connaît une expression de la distance en fonction du temps ? À un instant précis ? (C'est le point de vue local.) À un instant t, quel qu'il soit ? (C'est le point de vue global de détermination de la fonction dérivée.)

Exemple

Une bille est lâchée à 50 m du sol. Des relevés de mesures ont permis d'établir que la distance parcourue, en mètres, à l'instant t mesuré en secondes, est $4{,}9t^2$. Soient d et v les fonctions distance parcourue et vitesse instantanée. Comment déterminer $v(3)$? puis $v(t)$?

– Point de vue local : on peut approcher v(3) à partir de la vitesse moyenne $\frac{d(3+h)-d(3)}{h}$ entre les instants 3 et 3 + h avec h « proche » de zéro.
Un tableur permet d'évaluer cette vitesse moyenne.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
1	h	0,01	0,009	0,008	0,007	0,006	0,005	0,004	0,003	0,002	0,001	0	-0,001	-0,002	-0,003	-0,004
2	d(3+h)	44,39	44,36	44,34	44,31	44,28	44,25	44,23	44,19	44,16	44,129	#	44,0706	44,04	44,012	43,98
3	$\frac{d(3+h)-d(3)}{h}$	29,45	29,44	29,44	29,43	29,43	29,42	29,42	29,41	29,41	29,403	#	29,3951	29,39	29,385	29,38

Le problème posé par la valeur h = 0 peut se résoudre par un calcul algébrique de la vitesse moyenne entre les instants 3 et 3 + h. Une simplification classique permet d'écrire cette vitesse moyenne sous la forme 29,4 + 4,9h pour tout h non nul. Cela permet de comprendre que pour h très proche de 0 la vitesse moyenne est très proche de 29,4 km.h^{-1} et donc que $v(3)$ = 29,4.
– Point de vue global : le tableur permet de déterminer une valeur approchée de $v(a)$ pour d'autres valeurs de a et de donner une idée de cette fonction v. Le calcul de $v(a)/a$ peut aider à conjecturer la proportionnalité de $v(t)$ et t, et l'expression $v(t) = 9{,}8t$.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	x	0	0,3	0,6	0,9	1,2	1,5	1,8	2,1	2,4	2,7	3
2	f(x)	0	0,441	1,764	3,969	7,056	11,025	15,876	21,609	28,224	35,721	44,1
3	valeur approchée de v(x)	0	2,9449	5,8849	8,8249	11,765	14,7049	17,645	20,585	23,5249	26,465	29,405
4	v(x)/x	####	9,8163	9,8082	9,80544	9,8041	9,80327	9,8027	9,8023	9,802042	9,8018	9,8016
5												

Approximation affine

Soit f la fonction qui à x associe $x^3 + 2x$. Calculer mentalement les images par f de quelques entiers est aisé. Mais faire de même pour les images de 1,02 ou de 0,97 pose problème. Comment pourrait-on faire pour être en mesure de calculer mentalement une « bonne » valeur approchée de ces deux images ?

$f(1 + h) = 3 + 5h + 3h^2 + h^3$. La fonction qui à h associe $3 + 5h$ est affine et $3h^2 + h^3$ est très proche de 0 lorsque h est très proche de 0. Donc $f(1 + h)$ est très proche de $3 + 5h$ lorsque h est très proche de 0. L'approximation affine de $f(1 + h)$ est $3 + 5h$.

Un tableur peut permettre d'éclairer ce phénomène et d'observer la qualité de cette approximation.

Vision géométrique : tangentes à une courbe

Approche n° 1 : présenter la tangente comme position limite d'une sécante

Par exemple, avec un logiciel, faire tracer la courbe représentative (C_f) de la fonction qui à x associe $x^2 - 3x$ sur l'intervalle [– 1 ; 5] et placer le point A de coordonnées (2,5 ; $f(2,5)$) puis un point M mobile sur la courbe (C_f). Tracer la droite (AM) et faire bouger le point M. Observer le passage de M en A.

La tangente en A à la courbe (C_f) est la droite position limite des sécantes (AM) lorsque M est très proche du point A.

On peut admettre que le coefficient directeur de la tangente est la limite des coefficients directeurs des sécantes (AM) lorsque M s'approche de A. Vérifier que, si M a pour abscisse $2,5 + h$, le coefficient directeur de (AM) est $2 + h$. Tracer la droite passant par A et de coefficient directeur 2.

On peut recommencer l'expérience en changeant le point A.

Approche n° 2 : donner à comprendre que la tangente en A à la courbe (C_f) est la droite qui approche au mieux la courbe autour du point A

Par exemple soit f la fonction définie sur [0 ; 5], $f(x) = \dfrac{3x-4}{(x+1)^2}$.

Faire tracer sur la calculatrice la courbe représentative de f et placer le curseur au point A d'abscisse 1.

En utilisant le zoom, obtenir des grossissements de la courbe contenant le point A jusqu'à ce que cette courbe ait l'allure d'une droite. En lisant les coordonnées d'un point M de la courbe proche de A, déterminer le coefficient directeur de (AM). Ce coefficient directeur est une valeur approchée du coefficient directeur de la tangente en A.

Approximation d'un pourcentage

Ce point est à rattacher au point correspondant du programme obligatoire de mathématiques-informatique, et ne peut avoir lieu qu'après son étude.

Dans une logique qui consiste à mettre en évidence la cohérence entre les différentes visions du nombre dérivé, on peut faire constater que l'approximation affine des fonctions du type $x \mapsto (1+x)^n$ pour de petites valeurs de l'entier naturel n peut s'obtenir en développant $(1 + x)^n$ et en négligeant, quand x est suffisamment petit, les puissances de x supérieures ou égales à 2. On l'obtient aussi en déterminant le nombre dérivé de la fonction en 0, puis une équation de la tangente à la courbe représentative au point d'abscisse 0. L'approximation affine ainsi obtenue au voisinage de 0 fournit une valeur approchée de $(1 + x)^n$ comme ordonnée du point d'abscisse x de cette tangente.

On pourra poser aux élèves des questions en cohérence avec les problématiques envisagées dans le programme obligatoire de mathématiques-informatique. Par exemple :

– À quelle hausse semestrielle constante correspond une hausse annuelle donnée ?
– Est-ce qu'une hausse de x % sur un an équivaut à deux hausses successives de (x/2) % ? (Ou quatre hausses successives de (x/4) % ?)

Conduire ce travail revient à chercher une approximation affine en 0 de la fonction $x \mapsto \sqrt{1+x}$ puis de $x \mapsto \sqrt{\sqrt{1+x}}$, cela peut aussi permettre d'introduire les notations $(1 + x)^{1/2}$, $(1 + x)^{1/4}$.

Exemples de problèmes utilisant des fonctions

Aller-retour, ou comment augmenter ses performances routières

Exemple

Jean fait un aller-retour entre les villes A et B. À l'aller, il y a des embouteillages, et sa vitesse moyenne est de 20 km/h. Au retour, la route est dégagée et Jean peut rouler plus vite.
Déterminer la vitesse moyenne de Jean pour l'aller-retour, en fonction de sa vitesse retour et représenter graphiquement la fonction correspondante.
À quelle vitesse doit-il revenir pour que la vitesse moyenne sur l'aller-retour soit de 39 km/h ? de 40 km/h ?

Une première idée très naturelle est que la vitesse sur l'aller-retour est la moyenne arithmétique des vitesses, ce qui est faux. Un premier travail consistera à vérifier que cette réponse, presque toujours avancée par les élèves, est incorrecte. Il suffit de choisir par exemple AB = 20 km et vitesse au retour égale à 80 km/h ; les temps respectifs sont très faciles à calculer et la vitesse moyenne sur l'aller-retour est de 32 km/h, ce qui est très inférieur à la fois à la moyenne arithmétique proposée et à ce à quoi on pourrait s'attendre d'après le sens commun.
Pour la suite, il est souhaitable de rappeler la relation vitesse = distance/temps et les deux relations qui en découlent. Le calcul, lorsqu'on le mène de façon générale, ce qui n'est peut-être pas souhaitable avec les élèves, est le suivant :

À l'aller, la distance parcourue d à la vitesse v_1, nécessite un temps $t_1 = \dfrac{d}{v_1}$.

Au retour, la même distance d parcourue à la vitesse v_2, nécessite un temps $t_2 = \dfrac{d}{v_2}$.

Au total pour une distance de $2d$, le temps mis est égal à $t_1 + t_2 = \dfrac{d}{v_1} + \dfrac{d}{v_2} = d\,\dfrac{v_1 + v_2}{v_1 v_2}$.

Soit une vitesse moyenne sur l'aller-retour de $v = d\,\dfrac{2dv_1v_2}{d(v_1 + v_2)} = \dfrac{2v_1v_2}{v_1 + v_2}$.

Ce calcul explique pourquoi le fait de ne pas connaître la distance AB n'est pas gênant pour résoudre le problème.

Dans le cadre des données fournies, on obtient, en nommant x la vitesse du retour et v la vitesse moyenne sur l'aller-retour $v(x) = \dfrac{40x}{20 + x}$.

La question de l'intervalle d'étude se pose : il est raisonnable, compte tenu de l'énoncé et du Code de la route, de choisir [20, 130].
L'étude de v est classique ; on peut obtenir son sens de variation sans avoir recours ni à la dérivée de la fonction, ni à un calcul algébrique, le simple bon sens suffit.
Ce qui est une surprise, pour les élèves, c'est la mauvaise volonté que la courbe met à croître : avec 130 km/h au retour, limite supérieure de l'intervalle d'étude le plus souvent choisi, on obtient seulement 34,66… km/h pour l'aller-retour, et si on voulait atteindre ou dépasser 39 km/h, il faudrait accepter une vitesse au retour de plus de 780 km/h !
La résolution de $v(x) = 40$ montre qu'il n'y a pas de solution, ni pour l'équation, ni pour le problème. Deux prolongements sont possibles :
– l'étude de la dérivée de v peut être intéressante ; c'est une fonction décroissante sur l'intervalle d'étude, ce qui montre que la vitesse moyenne augmente de moins en moins vite ;

– on peut montrer que v est la moyenne pondérée de la vitesse de l'aller et de la vitesse du retour par des coefficients qui sont les temps pendant lesquels ces vitesses sont empruntées : ce qui a une valeur plus explicative pour les surprises de ce problème.

L'ombre d'un gyrophare

Voir le document d'accompagnement du programme antérieur de cette option pour la série L[1].

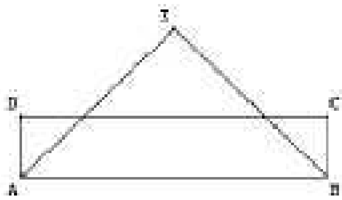
Un problème commercial

Exemple

Un pompiste revend le litre d'essence au prix de 1,20 €, alors que le prix d'achat est pour lui de 0,85 €. Le pompiste sait alors qu'il peut compter sur une vente journalière de 1 000 litres. Mais il sait aussi qu'à chaque baisse qu'il consent d'un centime d'euro pour le prix de vente du litre, il vend 100 litres supplémentaires par jour de ce carburant.
Comment doit-il fixer le prix de vente du carburant pour garantir un bénéfice maximal ?

On peut choisir de considérer que les rabais éventuels se font centime par centime, le nombre de baisses d'un centime est alors un entier.
Deux modes de traitement sont possibles pour ce problème, qui ne sont pas exclusifs :
– utilisation du tableur ;
– étude d'une fonction du second degré dont le maximum n'est pas entier.
On peut programmer pas à pas les calculs dans un tableur, en écrivant les calculs successifs et en étendant les formules vers le bas : il ne reste qu'à lire le résultat dans la dernière colonne.
Pour l'étude à l'aide d'une fonction : si k est le nombre de baisses d'un centime consenties, avec k entre 0 et 40, le bénéfice en euros, par litre, est de $(1{,}20 - 0{,}01k) - 0{,}85$, et le nombre de litres vendus de $1\,000 + 100k$, ce qui donne un bénéfice égal au produit, soit à $-k^2 + 25k + 350$. L'étude de la fonction de variable réelle $x \mapsto x^2 + 25x + 350$ met en évidence un maximum obtenu pour $x = 12{,}5$. Comme k est entier, on peut choisir 12 ou 13 comme solution au problème.
Le bénéfice correspondant est alors de 506 €, pour un prix de vente au litre de 1,07 ou 1,08 €.

Un triangle et un rectangle de même aire

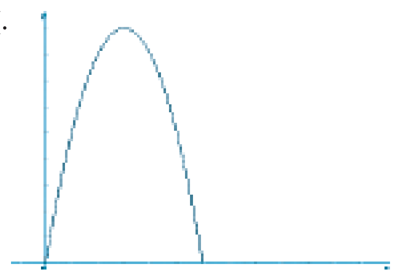


Exemple

Dans la figure ci-contre, le rectangle ABCD a pour périmètre 12 et le triangle isocèle ABE a aussi pour périmètre 12.
Un tel triangle et un tel rectangle peuvent-ils avoir également la même aire ?

Variation de l'aire du rectangle en fonction de l'un de ses côtés

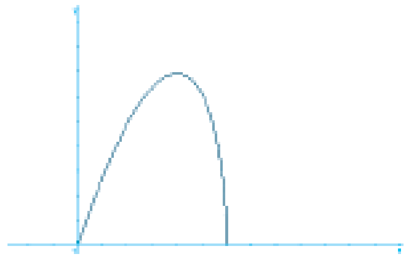
Choisissons comme inconnue la longueur du côté commun au triangle et au rectangle.
Posons AB = x.
Les contraintes du problème imposent $x \in]0, 6[$.
L'expression de l'aire R du rectangle, en fonction de x, est $R(x) = x(6 - x)$.
On a aussi, pour tout nombre réel x :
$R(x) = -x^2 + 6x = -(x - 3)^2 + 9$.



1. *Mathématiques, cycle terminal de la série littéraire (option facultative)*, CNDP, 2002, coll. « Lycée », page 8.

Variation de l'aire du triangle isocèle en fonction de AB

Avec x = AB, où $x \in]0, 6[$, posons AE = BE = y.
Appelons P le périmètre et T l'aire du triangle ABE.
On a :



$P = 12$,

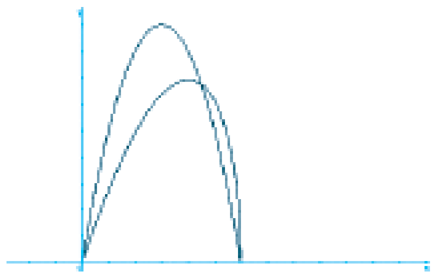
$P = x + 2y$,

$$T = \frac{1}{2}x\sqrt{y^2 - \frac{x^2}{4}},$$

d'où : $T(x) = \frac{1}{2}x\sqrt{36 - 6x}$.

La dérivée est à donner aux élèves,
car savoir calculer la dérivée d'une telle fonction
n'est pas un objectif du programme :

$$T'(x) = \frac{36 - 9x}{2\sqrt{36 - 6x}}.$$



Conjecture

Il semble exister, dans l'intervalle]0, 6[
une valeur de x pour laquelle le triangle ABE
et le rectangle ABCD ont même aire.
« Cela semble se produire pour $x = 4{,}5$. »

Question

Lorsque AB = 4,5 le triangle ABE et le rectangle ABCD ont-ils bien même aire ?
Le contrôle numérique est simple : R (4,5)=T (4,5). Le triangle ABE et le rectangle ABCD peuvent donc avoir même aire. Cela se produit lorsque AB = 4,5. On a une solution.

Y-a-t-il d'autres solutions ?

L'égalité R(x) = T(x) s'écrit $x^2 + 6x = \frac{1}{2}x\sqrt{36 - 6x}$.

Résoudre une telle équation nécessite une transformation, puis la résolution d'une équation du second degré. Il faut pour fournir une réponse correcte tenir compte des contraintes que le problème impose à la variable x.
Cette activité offre la possibilité de faire la distinction entre « avoir une, des solutions de… » et « avoir les solutions de… ». Trouver une valeur numérique de la variable qui assure l'égalité ne signifie pas que l'équation soit résolue. [■ Logique]
Des problèmes pour lesquels une résolution algébrique serait délicate peuvent donner lieu à l'élaboration d'un algorithme fournissant une solution approchée. [■ Algorithmique]

Analyse – classe terminale

Écriture décimale des nombres réels

Le programme propose de compléter les acquis des élèves sur les suites essentiellement dans le but de poursuivre l'étude des nombres. Il s'agit en classe terminale de compléter la connaissance des nombres rationnels. On se limitera à l'étude des nombres positifs.

Écriture décimale d'un nombre rationnel

La définition donnée en classe de sixième de l'écriture fractionnaire $\frac{a}{b}$ (a et b étant deux entiers naturels avec b non nul) est « $\frac{a}{b}$ est le nombre qui multiplié par b donne a, autrement dit $\frac{a}{b}$ est le résultat de la division décimale de a par b. »

Dans certains cas, les élèves ont pu reconnaître des nombres familiers depuis le cycle 3. C'est le cas par exemple de $\frac{5}{2}$. Un travail conduit dès la classe de sixième consiste à écrire $5 = 2 \times 2 + 1$. Le reste de la division euclidienne de 5 par 2 peut s'écrire soit 10 dixièmes, soit 2×5 dixièmes. Donc le nombre qui multiplié par 2 donne 5 est le nombre décimal 2 et 5 dixièmes : $\frac{5}{2} = 2{,}5$.

$\frac{5}{2}$ est un nombre décimal. Il a une écriture décimale.

Mais ils ont eu l'occasion de réaliser que les choses ne sont pas toujours aussi simples, en particulier si l'on considère des nombres tels que $\frac{2}{3}$.

$2 = 20$ dixièmes or $20 = 3 \times 6 + 2$, donc $2 = 3 \times 0{,}6 + 0{,}2$.

$\frac{2}{3}$ n'est pas égal au nombre décimal 0,6.

$0{,}2 = 20$ centièmes, donc $2 = 3 \times 0{,}6 + 3 \times 0{,}06 + 0{,}02$.

$\frac{2}{3}$ n'est pas égal au nombre décimal 0,66.

On pourrait poursuivre le processus aussi longtemps que l'on veut, on serait toujours dans l'incapacité de produire un nombre décimal dont le produit par 3 est égal à 2.

Ces calculs montrent clairement que 2/3 n'a pas d'écriture décimale.

Et pourtant lorsque l'on effectue la division décimale de 2 par 3 le reste est toujours de la forme 2×10^{-n} (avec n entier naturel) et ce reste peut donc toujours se transformer sous la forme $3 \times 6 \times 10^{-n-1} + 2 \times 10^{-n-1}$. Les chiffres de la partie décimale que l'on obtient en effectuant la division décimale de 2 par 3 sont donc toujours des 6.

Cela peut donner l'envie d'écrire $\frac{2}{3} = 0{,}6666\ldots$, à condition de donner du sens aux points de suspension dans cette écriture. Mais quel sens mathématique donner à l'écriture 0,6666… ?

Seules les connaissances de terminale permettent de répondre :

$0{,}6666\ldots = 6 \times (10^{-1} + 10^{-2} + 10^{-3} + 10^{-4} + \ldots)$, égalité que l'on peut interpréter par $0{,}6666\ldots = \lim\limits_{n \to \infty} 6 \ (10^{-1} + 10^{-2} + \ldots\ 10^{-n})$.

Une question subsiste : Cette limite est-elle bien égale à $\frac{2}{3}$?

$$6 \times (10^{-1} + 10^{-2} + \ldots\ 10^{-n}) = 0{,}6 \times \frac{1 - 0{,}1^{n}}{1 - 0{,}1} = \frac{2}{3} \times \left(1 - 0{,}1^{n}\right).$$

Comme $0{,}1^n$ tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini, $\frac{2}{3} \times (1 - 0{,}1^n)$ tend vers $\frac{2}{3}$.

Une rupture importante est à mettre en relief ; jusqu'à présent pour les élèves, 2/3 n'avait pas d'écriture décimale car ce n'est pas un nombre décimal. Les nouvelles connaissances acquises leur permettent maintenant d'attribuer à 2/3 une écriture décimale illimitée.

Exercice 1

Exemple

Comment obtenir l'écriture décimale éventuellement illimitée d'un nombre rationnel et quelle propriété pour une telle écriture ?

Par exemple $\frac{54}{17}$ $\begin{array}{r\|l} 54 & 17 \\ \hline \mathbf{3} & 3 \end{array}$	Comme $\frac{54}{17}$ est le nombre qui multiplié par 17 donne 54, effectuons la division de 54 par 17. Dans un premier temps, il s'agit de la division euclidienne : $54 = 3 \times 17 + 3$.
$\begin{array}{r\|l} 54 & 17 \\ 30 & 3{,}1 \\ \mathbf{13} & \end{array}$	Première explication : $\frac{54}{17} = \frac{540}{17} \times \frac{1}{10}$. Comme $540 = 31 \times 17 + 13$, en divisant les deux membres par 10, on obtient $54 = 3{,}1 \times 17 + 1{,}3$. Seconde explication : le reste 3 est égal à 30 dixièmes. Comme $30 = 1 \times 17 + 13$, on obtient $54 = 3 \times 17 + 0{,}1 \times 17 + 1{,}3$.
$\begin{array}{r\|l} 54 & 17 \\ 30 & 3{,}17 \\ 130 & \\ \mathbf{11} & \end{array}$	Première explication : $5\,400 = 317 \times 17 + 11$ et en divisant par 100 on obtient $54 = 3{,}17 \times 17 + 0{,}11$. Seconde explication : le reste 1,3 peut s'écrire 130 centièmes. Or 130 centièmes = 17×7 centièmes + 11 centièmes. Donc $54 = 3{,}1 \times 17 + 0{,}07 \times 17 + 0{,}11$.

Si on analyse d'un peu plus près les différentes étapes :
$54 = 3 \times 17 + 3$, reste 3.
$30 = 1 \times 17 + 13$, reste 13.
$130 = 7 \times 17 + 11$, reste 11. [■ Algorithmique]

Exercice 2

Exemple

Combien de restes différents peut-on au plus avoir lorsqu'on effectue la division euclidienne d'un entier naturel par 17 ?
Au bout d'au plus combien de calculs obtiendra-t-on un reste déjà trouvé ?
Quelle conséquence cela aura-t-il sur la partie décimale de l'écriture du nombre ?

Supposons que $a < b$, autrement dit que la partie entière de $\frac{a}{b}$ soit égale à 0.
$10a = b \times x_1 + r_1$ avec $0 \leqslant r_1 < b$
$10r^1 = b \times x_2 + r_2$ avec $0 \leqslant r_2 < b$
$10r^2 = b \times x_3 + r_3$ avec $0 \leqslant r_3 < b$
…
$10_{ri} = \mathrm{b} \times x_{i+1} + r_{i+1}$ avec $0 \leqslant r_{i+1} < \mathrm{b}$

$\frac{a}{b} = 0, x_1\, x_2\, x_3 \ldots$

Les restes possibles ne peuvent prendre qu'un nombre fini de valeurs, les b entiers naturels inférieurs ou égaux à b. Cela qui signifie qu'après un nombre de calculs au plus égal à b on retrouve nécessairement un des restes précédemment trouvés et le calcul se réitère.
Les nombres rationnels ont une écriture décimale périodique éventuellement illimitée.

Exercice 3

Réciproquement : un nombre dont l'écriture décimale est périodique est-il toujours un nombre rationnel ?

Soit par exemple le nombre : 1,**875614**875614…

N.B. – Ce nombre a été choisi pour illustrer deux stratégies différentes. Mais on veillera à proposer aux élèves des exemples plus simples.

Méthode 1

On peut écrire 1,875614… = 1 + 875614…($10^{-6} + 10^{-12} + 10^{-18} + \ldots 10^{-6n} + \ldots$).
Or l'expression entre parenthèses est une somme infinie de termes d'une suite géométrique de raison
10^{-6}.
Posons $S_n = (10^{-6} + 10^{-12} + 10^{-18} + \ldots + 10^{-6n})$.
On a donc $S = 10^{-6} + 10^{-12} + 10^{-18} + \ldots + 10^{-6n} + \ldots = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$.

ligne 1 $\quad S_n = (10^{-6} + 10^{-12} + 10^{-18} + \ldots 10^{-6n})$
ligne 2 $\quad 10^{-6}S_n = (10^{-12} + 10^{-18} + 10^{-24} + \ldots + 10^{-6(n+1)})$

ligne 1 – ligne 2 $\quad S_n(1 - 10^{-6}) = (10^{-6} - 10^{-6(n+1)})$

et enfin $S = \lim \dfrac{10^{-6} - 10^{-6(n+1)}}{1-10^{-6}}$ et comme $\lim\limits_{n\to\infty} 10^{-6(n+1)} = 0$,

on obtient : $S = \dfrac{10^{-6}}{1-10^{-6}} = \dfrac{10^{-6}}{1-10^{-6}} \times \dfrac{10^{+6}}{10^{+6}} = \dfrac{1}{10^{6}-1} = \dfrac{1}{999\,999}$.

En remplaçant, on obtient : $1{,}875614\ldots = 1 + 875614 \times \dfrac{1}{999\,999} = \dfrac{999\,999 + 875\,644}{999\,999}$.

Méthode 2

1,**875614**875614… = 1 + 0, 875614875614…
Posons P = 0, 875614875614…
10^6P = 875 614,875614…, d'où P $(10^6 - 1)$ = 875 614, finalement $P = \dfrac{875\,644}{999\,999}$ et
1,**875614**875614…= $1 + \dfrac{875\,644}{999\,999}$.

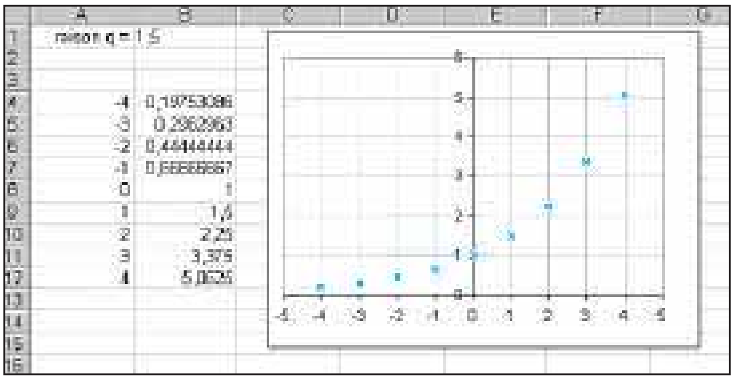
La démonstration dans le cas général n'est pas à faire avec les élèves.
L'étude successive de ces deux propriétés, réciproques l'une de l'autre, permet d'obtenir une propriété qui caractérise les nombres rationnels, et donc aussi une propriété qui caractérise les nombres irrationnels. [■ Logique]

Fonctions exponentielles

Le programme suggère d'introduire une fonction exponentielle comme « prolongement » d'une suite géométrique de raison strictement positive et de premier terme 1.
Le problème du prolongement des suites étudiées dans le programme de mathématique et d'informatique de première peut être posé : le nuage de points représentant une suite arithmétique est inclus dans la courbe représentative d'une fonction affine, celui représentant une suite à différences secondes constantes dans la courbe représentative d'une fonction polynôme du second degré. Que se passe-t-il pour une suite géométrique ?
Il s'agit de mettre en œuvre une démarche permettant de faire comprendre aux élèves comment on peut passer du discret (suite géométrique de raison strictement positive q) au continu (fonction exponentielle de base q) en plusieurs étapes.
Deux démarches sont envisageables.
– Effectuer un passage de $\mathbb{N}$ à $\mathbb{Z}$ afin de pouvoir définir des « suites géométriques généralisées » sur $\mathbb{Z}$, et non pas seulement sur $\mathbb{N}$, puis mettre en place un processus dichotomique.
– Mettre d'emblée en place en processus dichotomique, construire ainsi une fonction sur $\mathbb{R}$+, puis effectuer le prolongement à $\mathbb{R}$.

Premier stade

On complète d'abord toute suite géométrique de premier terme 1 et de raison strictement positive q, par les puissances négatives de q. On obtient ainsi ce que l'on pourrait appeler une « suite géométrique généralisée » de raison q, autrement dit une fonction définie sur $\mathbb{Z}$.



raison q = 1,5	
-4	0,19753086
-3	0,2962963
-2	0,44444444
-1	0,66666667
0	1
1	1,5
2	2,25
3	3,375
4	5,0625

Nuage des points représentant les puissances entières du nombre réel strictement positif q.

On construit ainsi une fonction définie sur $\mathbb{Z}$par $f(m) = q^m$. Cette fonction est telle que l'image de la somme de deux nombres est le produit des images de ces deux nombres : pour tous entiers relatifs n et m, on a $q^{m+n} = q^m \times q^n$.
La suite géométrique généralisée obtenue a la même propriété que la suite géométrique initiale :
Pour tout entier relatif n, $q^{n-1} \times q^{n+1} = (q^n)^2$, autrement dit le terme de rang n est la moyenne géométrique des termes de rang $n - 1$ et $n + 1$.
La fonction f obtenue a la propriété suivante : l'image de la moyenne arithmétique de $n - 1$ et de $n + 1$ est la moyenne géométrique des images de $n - 1$ et de $n + 1$.
Le processus multiplicatif est conservé :

$$\text{Ordonnée d'un point} \xrightarrow{\times q} \text{Ordonnée du point suivant}$$

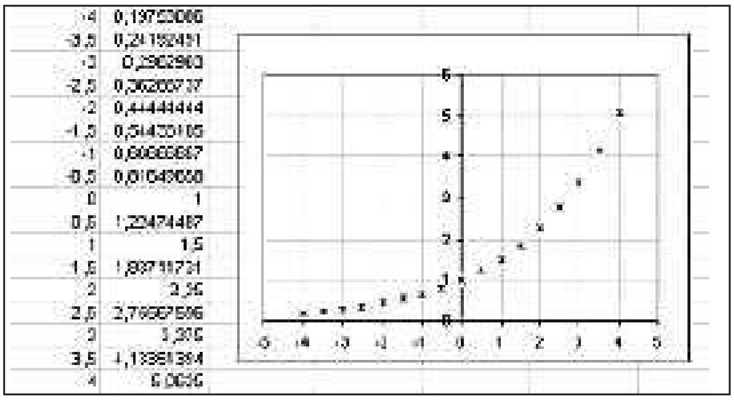
Second stade

Mise en place d'un processus dichotomique : à chaque étape, entre deux points du nuage précédent, on ajoute un nouveau point ayant pour abscisse la moyenne arithmétique des abscisses de ces deux points et comme ordonnée la moyenne géométrique de leurs ordonnées.

Première étape du processus dichotomique

Par construction même, la propriété de la moyenne géométrique est conservée.
Le processus multiplicatif est conservé :

$$\text{Ordonnée d'un point} \xrightarrow{\times\sqrt{q}} \text{Ordonnée du point suivant}$$



-4	0,19753086
-3,5	0,24192491
-3	0,2962963
-2,5	0,36288737
-2	0,44444444
-1,5	0,54433105
-1	0,66666667
-0,5	0,81649658
0	1
0,5	1,22474487
1	1,5
1,5	1,83711731
2	2,25
2,5	2,75567596
3	3,375
3,5	4,13351394
4	5,0625

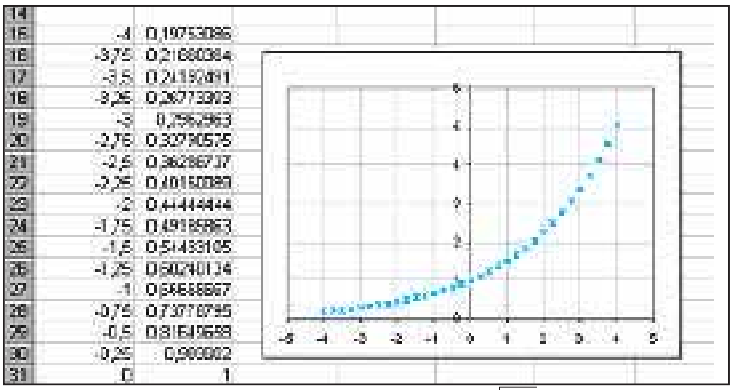
On obtient une fonction définie sur l'ensemble des nombres de la forme $m/2$ où m est élément de $\mathbb{Z}$. Cette fonction est telle que l'image de la somme de deux nombres est le produit des images de ces deux nombres.

N.B. – En démontrant que f est définie pour tout entier relatif m par $f(m/2)=\sqrt{q}^{\,m}$ (ce qui n'est pas nécessairement à faire avec les élèves), on peut prouver que pour tous entiers relatifs n et m ; on a : $f(\frac{m+n}{2})=\sqrt{q}^{\,m+n} = \sqrt{q}^{\,m}\times\sqrt{q}^{\,n} = f(\frac{m}{2})\times f(\frac{n}{2})$
Dans la plupart des cas, on pourra se contenter de faire conjecturer la conservation d'une telle propriété avec un tableur.

Seconde étape du processus dichotomique

Par construction même la propriété de la moyenne géométrique est conservée.
Le processus multiplicatif est conservé :

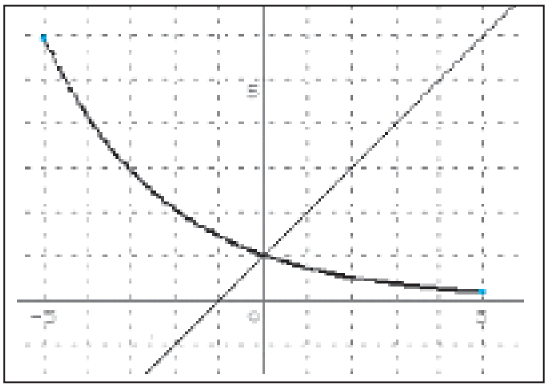
$$\text{Ordonnée d'un point} \xrightarrow{\times\sqrt{\sqrt{q}}} \text{Ordonnée du point suivant}$$



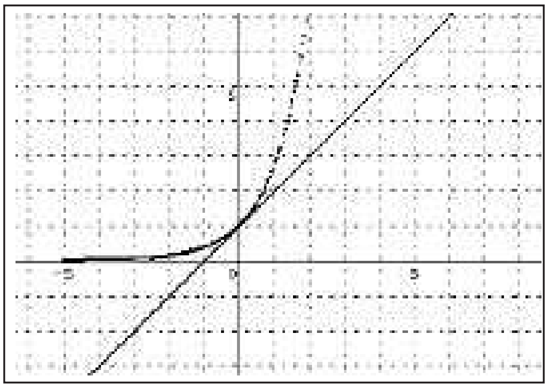
14		
15	-4	0,19753086
16	-3,75	0,21880384
17	-3,5	0,24192491
18	-3,25	0,26773303
19	-3	0,2962963
20	-2,75	0,32790575
21	-2,5	0,36288737
22	-2,25	0,40160089
23	-2	0,44444444
24	-1,75	0,49185863
25	-1,5	0,54433105
26	-1,25	0,60240134
27	-1	0,66666667
28	-0,75	0,73778795
29	-0,5	0,81649658
30	-0,25	0,903602
31	0	1

On obtient la suite géométrique généralisée de raison $\sqrt{\sqrt{q}}$ (le terme de rang 0 étant 1).
On construit de cette manière une fonction définie sur l'ensemble de nombres de la forme $m/2^2$ où m est élément de $\mathbb{Z}$. Cette fonction est toujours telle que l'image de la somme de deux nombres est le produit des images de ces deux nombres.

N.B. – En démontrant que f est définie pour tout entier relatif m par $f(m/2^2)=\sqrt{\sqrt{q}}^{\,m}$, on pourrait justifier cette dernière propriété mais il n'est pas demandé de le faire avec les élèves…
S'il n'est pas du tout question d'en parler aux élèves on remarquera que le processus décrit ci-dessus permet d'effectuer le passage de $\mathbb{Z}$ à D_2, où D_2 est l'ensemble des rationnels dyadiques (*i.e.* les rationnels qui s'écrivent sous la forme $m/2^p$, avec m dans $\mathbb{Z}$ et p dans $\mathbb{N}$). Cet ensemble D_2 étant dense dans $\mathbb{R}$, un tel processus permet donc bien de définir une unique fonction définie sur $\mathbb{R}$ prolongement continu de cette fonction définie sur D_2.
En effet, pour tout nombre réel x, il existe une suite x_n de nombres dyadiques convergente et de limite x. $f(x) = q^x$ est la limite de $f(x_n) = q^{x_n}$
Avec les élèves, on admettra que l'on complète petit à petit de cette manière la courbe représentative d'une fonction dérivable sur R, strictement positive sur R et qui a la qualité de transformer les sommes en produits. Il s'agit de la fonction $x \mapsto q^x$. On pourra faire observer différents nuages de points obtenus en faisant varier la raison.
Les figures suivantes ont été obtenues avec le logiciel Géoplan, fichier « expon2.g2w », respectivement pour $q = 0,7$ et $q = 1,5$.



Il est alors possible de faire observer qu'entre tous les nuages de points obtenus en faisant varier la raison, un et un seul semble approcher la courbe d'une fonction admettant en son point d'abscisse 0 une tangente de coefficient directeur 1.
Pour q ≈ 2,7 , la droite (d) a pour équation $y = x + 1$.



Comme le préconise le programme, l'existence et l'unicité d'une fonction exponentielle ayant 1 pour nombre dérivé en 0 seront admises. Par définition e est l'image de 1 par cette fonction.
La fonction exponentielle de base e est donc le « prolongement » de la suite géométrique de premier terme 1 et de raison e, ce qui justifie la notation puissance pour l'image d'un nombre réel quelconque par cette fonction exponentielle.

Fonctions logarithme népérien et logarithme décimal

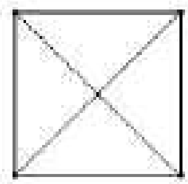
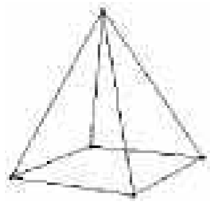
Le programme laisse la liberté d'introduire de deux manières différentes la fonction logarithme népérien et la fonction logarithme décimal.
Suivant le mode d'introduction choisi, l'une des deux propriétés de la fonction ln explicitement au programme (propriété des courbes représentatives de ln et exp en repère orthonormé, et propriété de l'image d'un produit par la fonction ln) est acquise. L'autre doit être justifiée.
La dérivabilité de la fonction ln sur $]0, +\infty[$ étant admise, calculer de deux manières différentes la dérivée de la fonction $x \mapsto \exp(\ln(x))$ permet de déterminer la fonction dérivée de la fonction ln.

Géométrie

Le problème de la représentation plane de l'espace s'est sans aucun doute posé dès que l'homme a commencé à dessiner et s'est manifesté à différentes époques dans de nombreux domaines. La question de la ressemblance entre l'objet et sa représentation, et la question de l'information fournie par la représentation, notamment dans le cas des dessins techniques, sont deux aspects fondamentaux et parfois antagonistes.

Il est important pour les élèves, appelés à vivre dans un environnement de plus en plus dominé par l'image, de savoir décoder – et pourquoi pas encoder ? – les représentations planes de l'espace. Qui plus est, certains domaines professionnels – comme l'architecture, la scénographie ou l'archéologie – font grand usage de représentations variées de l'espace : vues, axonométries, perspectives… Il s'agit donc ici de donner aux élèves une culture de base relativement aux modes de représentation usuels de l'espace, en étudiant plus particulièrement ceux qui sont fondés sur la notion de projection sur un plan ; en effet, la perspective dite « cavalière » – qu'il est préférable d'appeler « parallèle[1] » – est couramment utilisée comme dessin technique en architecture et dans l'industrie, tandis que la perspective « à point de fuite », également très utilisée en architecture, a servi de fondement à tous les arts picturaux pendant plusieurs siècles.

Comme nous l'avons dit, l'un des buts possibles des représentations de l'espace est de permettre au spectateur de se représenter mentalement la situation spatiale[2] en jeu. Dans le cas du dessin, on cherche, pour y parvenir, d'une part à produire un dessin qui « ressemble » à la vision qu'on peut (pourrait) en avoir habituellement, et d'autre part à préserver sur ce dessin certaines propriétés de la situation, de façon à faciliter le passage de la situation à sa représentation et vice-versa, c'est-à-dire l'écriture et la lecture du dessin. Ces deux soucis – qu'on pourrait qualifier de « visuel » et de « géométrique » – sont le plus souvent antagonistes et on est ainsi amené, par nécessité, à faire des choix destinés à les concilier « au mieux » selon le but recherché. Prenons l'exemple du dessin d'une pyramide régulière à base carrée « squelette[3] » :

Le dessin de gauche est une représentation très fréquente chez les jeunes enfants (cycle 3 de l'école élémentaire et début du collège) : elle conserve beaucoup de propriétés géométriques de l'objet (base carrée, faces isocèles, symétries, etc.) mais ne se donne pas directement à lire comme un dessin de pyramide (qui serait vue de dessus) : on y voit plutôt un objet plan (carré avec ses diagonales). À l'inverse, le dessin de droite, représentation de type « photographique », est perçu[4] comme le dessin d'un objet de l'espace, mais peu de propriétés élémentaires y sont conservées, à part l'alignement. Entre ces deux cas extrêmes, on peut trouver des représentations très variées qui, tout en donnant une impression de relief, préserveront certaines propriétés de l'objet. La

1. Pour des raisons qui seront précisées plus loin.
2. Il peut, selon le cas, s'agir d'un objet ou d'un ensemble organisé d'objets.
3. C'est-à-dire réduite à ses arêtes.
4. Du moins par quelqu'un qui a déjà rencontré un tel objet.

perspective parallèle (étudiée en classe de première) et la perspective centrale (étudiée en classe terminale) sont deux systèmes de représentation permettant de conjuguer, d'une façon jugée optimale eu égard aux objectifs visés par la représentation, les deux soucis indiqués plus haut.
Pour aborder l'étude de ces systèmes de représentation et aider les élèves à en comprendre les principes, le programme a choisi de se baser, d'une manière en quelque sorte métaphorique, sur l'étude du phénomène de l'ombre, qui fait partie de notre quotidien et peut donc être observée à loisir : ombre « au soleil » en classe de première, ombre « au flambeau » en classe terminale. Les éléments sur lesquels porte cette métaphore – et les limites de celle-ci – sont précisés ; le passage de l'ombre à la perspective s'opère ensuite grâce à la notion (géométrique) de projection sur un plan. La démarche suivie dans le programme peut donc être schématisée sous la forme suivante[5] :

$$\begin{tikzcd} \text{Ombre} \arrow[rr, leftrightarrow] \arrow[dr] & & \text{Vision} \arrow[dl] \\ & \text{Projection sur un plan} \arrow[d] & \\ & \text{Perspective} & \end{tikzcd}$$

Ces divers éléments se situent dans trois « mondes » différents : les phénomènes de l'ombre et de la vision se rattachent au monde physique, tandis que la perspective est une représentation de l'espace physique dessinée sur un support plan ; quant à la projection, elle appartient à une théorie géométrique qui modélise à la fois l'ombre et la perspective.
Cette entrée par l'ombre permet de donner du sens à la notion de représentation en perspective. Comme il s'agit simplement d'observer et de noter quelques propriétés de ce phénomène physique, il n'est pas nécessaire d'y consacrer trop de temps en classe : ce travail peut être entrepris à tout moment par les élèves, sous forme de travail personnel, et la synthèse, réalisée en classe à l'aide d'un « cube squelette », servant de point de départ à l'étude géométrique de la perspective. On trouvera en annexe des idées de matériels utilisables à cette fin.

Classe de première – la perspective parallèle

La perspective parallèle propose un système de représentation comparable à un phénomène physique banal ; sa relative simplicité d'utilisation, comme l'intérêt des propriétés conservées, font que ce système constitue un véritable dessin technique, et non seulement une simple aide visuelle, ce qui explique son utilisation quasi exclusive dans l'enseignement de la géométrie de l'espace. Réaliser un dessin correct consiste en fait à résoudre un problème de géométrie, permettant en outre – ce qui n'est pas si fréquent – un autocontrôle relativement aisé sur la production elle-même.
Notons cependant qu'il ne s'agit pas de faire aux élèves un cours de perspective parallèle, mais d'observer que l'ombre au soleil d'un objet « squelette » est une image de cet objet (plus ou moins déformée) analogue à celles qui sont utilisées en géométrie de l'espace et que certaines propriétés de l'objet (alignement, parallélisme, etc.) se retrouvent également sur son ombre. Sur la base de cette observation, on se propose ensuite d'étudier une modélisation géométrique de ce phénomène, dans le but de la définir comme perspective parallèle et, par contrecoup, de comprendre pourquoi les propriétés de l'ombre au soleil – et de la perspective parallèle – sont ce qu'elles sont. Ce qui permettra d'utiliser le dessin en perspective parallèle comme un dessin technique, et non plus comme un simple support visuel.

N.B. – Ce qui suit n'est pas un cours « type ». Il s'agit seulement d'un exposé raisonné, à destination des enseignants, des idées directrices figurant dans le programme de la classe

5. Si le mot « vision » convient à la perspective linéaire, où on peut supposer un observateur – borgne – placé au point de vue, il n'est pas réellement adapté à la perspective cavalière, car il faudrait imaginer l'observateur à l'infini ; c'est donc par abus de langage – ou « passage à la limite » – que nous utilisons le mot « vision » dans les deux cas.

de première ; bien entendu, le professeur est tout à fait libre d'adopter une présentation et une progression différentes, dès lors qu'elles sont compatibles avec le programme.

L'ombre au soleil

Démarche

On commence par observer l'ombre au soleil d'un cube « squelette » sur un plan, dans le but de conjecturer quelques propriétés des ombres portées ; pour les justifier, on réalise des dessins dans des plans qui seront précisés, dessins qui conduisent à un modèle géométrique et permettent, le cas échéant, d'effectuer des démonstrations de géométrie plane. Puis on opère le passage de l'ombre au dessin et on poursuit l'étude des propriétés, que l'on applique à la résolution de problèmes de dessin.

Idée de base

Une réalisation physique de la perspective parallèle est l'ombre d'un objet « squelette » portée par le soleil sur un plan. Objet « squelette » de référence : le cube (en relation avec le repérage orthonormal de l'espace). Dans un premier temps, on s'intéresse à l'ombre au soleil d'un cube « squelette » (réalisé en tiges de bois, de métal, de plastique…), dans le cas particulier où celui-ci est posé sur un plan horizontal. Il s'agit ici de donner une modélisation géométrique de ce phénomène physique.

N.B. – On suppose que le soleil n'est pas au zénith (ce qui est toujours le cas hors de la zone intertropicale). Les rayons solaires sont donc « obliques » (c'est-à-dire non verticaux).

Notation

On désignera – sauf exception – les points de l'objet par des lettres majuscules et leur ombre par la lettre minuscule correspondante.

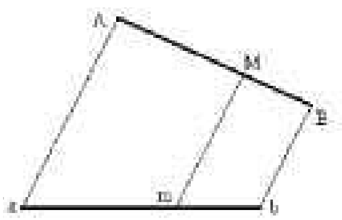
N.B. – Les constatations ci-dessous s'appuient sur des dessins de géométrie plane, qui permettent de reconnaître des configurations déjà rencontrées au collège ; le but est de justifier le bien-fondé de certaines propriétés observées, il n'est donc pas utile de s'attacher ici à élaborer des démonstrations formelles.

Première constatation

La lumière se propage en ligne droite (rayons lumineux) et les rayons solaires tombant sur un objet sont parallèles.
Nous ferons ici deux hypothèses de modèle :
1) le soleil n'est pas une source lumineuse ponctuelle, mais nous l'assimilerons cependant à une source ponctuelle (cette hypothèse est justifiée par le fait que le soleil est perçu de la Terre comme un « gros point » ayant seulement un demi-degré de contour apparent) ;
2) les rayons lumineux émanant d'un point du soleil divergent à partir de ce point, mais nous considérerons ceux qui atteignent un objet comme parallèles (hypothèse justifiée par la taille infime des objets terrestres par rapport à la distance Terre-soleil).

Seconde constatation

L'ombre d'un segment est un segment.

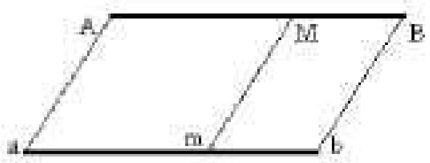


Sans en faire une démonstration formelle, on peut faire remarquer que tous les rayons « s'appuyant » sur un point du segment [AB] sont, comme celui-ci, dans le plan déterminé par les rayons extrêmes (Aa) et (Bb).

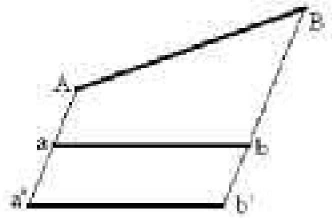
Dessiner la situation dans ce plan : on reconnaît la situation de Thalès.

N.B. – Ceci exclut le cas où [AB] est parallèle aux rayons solaires : dans ce cas, l'ombre se réduit à un point.

1) Les proportions sont conservées sur l'ombre du segment, et en particulier le milieu est conservé (on dit que l'ombre au soleil « conserve » le milieu).
2) L'ombre d'un segment horizontal est un segment qui lui est parallèle et qui a la même longueur.

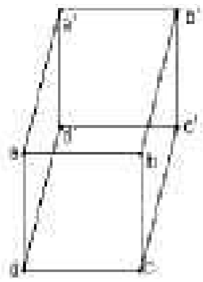


Conséquence : l'ombre d'un objet (plan) horizontal est « en vraie grandeur » et les segments sont parallèles à leur ombre.
3) Les ombres d'un segment sur deux plans horizontaux sont deux segments parallèles et de même longueur.

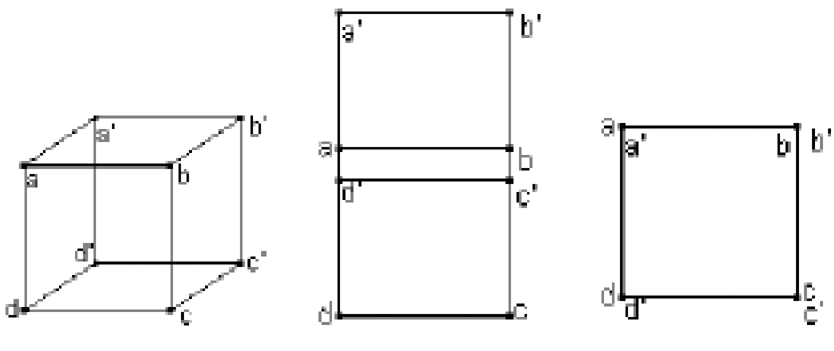


Conséquence : les ombres de deux objets (plans) horizontaux sur deux plans parallèles sont identiques.

Application : dessin de l'ombre du cube sur le plan où il est posé
La face inférieure A'B'C'D' coïncide avec son ombre a'b'c'd' et l'image de la face supérieure du cube est un carré « translaté » de la face inférieure. D'où le dessin de l'ombre de cube sur le sol (on a ici supposé que le soleil n'est pas très haut et très à droite).

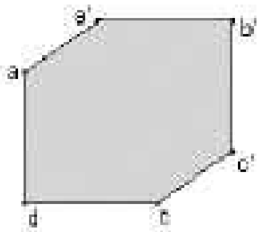


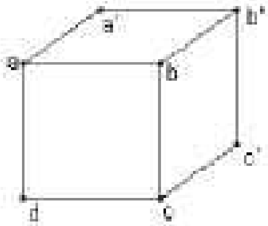
N.B. – Le matin et le soir, l'ombre du cube est plus longue qu'en milieu de journée, mais l'ombre des faces supérieure et inférieure ne change pas de taille ; c'est uniquement l'ombre des faces latérales qui s'allonge, par exemple :

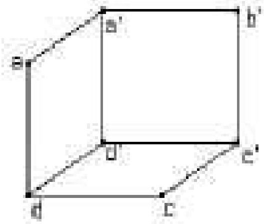


De l’ombre au dessin

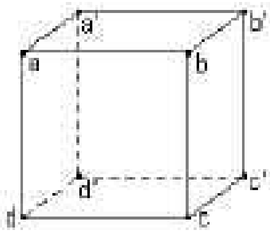
Les dessins ci-dessus de l’ombre d’un cube, et en particulier celui de gauche, peuvent se « lire » comme des dessins d’un cube. Mais cette lecture est ambiguë, comme on s’en rend compte si l’on suppose que le cube n’est pas « squelette », mais « plein » (opaque) ; dans ce cas, le dessin est du type du dessin de gauche, dans lequel trois arêtes ne sont pas visibles (car leur ombre est masquée par l’ombre des faces qui s’interposent entre ces arêtes et le soleil), mais lesquelles ? Deux interprétations sont possibles :

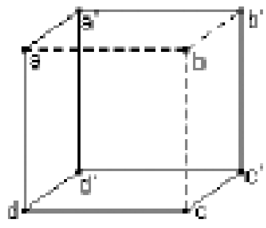






Le carré abcd est l’ombre de la face supérieure du cube, mais on l’interprète intuitivement :
– soit comme le dessin de la face avant (dessin du centre) ;
– soit comme le dessin de la face arrière (dessin de droite).
Dans les deux cas, on interprète aa’b’b comme étant le dessin de la face supérieure.
En fait, tout se passe comme si, au lieu de considérer l’ombre portée sur le sol, on avait l’ombre portée sur un mur vertical : en effet, ce sont les faces que l’on interprète comme verticales qui sont dessinées « en vraie grandeur ». On peut donc interpréter le dessin comme l’ombre d’un cube fixé à un mur par sa face arrière : la face a’b’c’d’ dans le dessin de gauche (vue plongeante), la face abcd dans le dessin de droite (contre-plongée).
D’autre part, nous venons de voir que, en supposant le cube opaque, les dessins de certaines arêtes deviennent invisibles. Le moyen traditionnellement utilisé pour les faire voir, tout en levant l’ambiguïté signalée plus haut, est de représenter ces arêtes en trait pointillé :





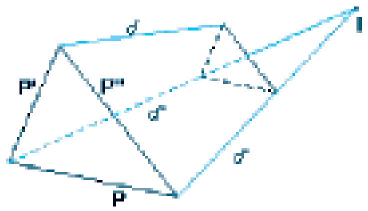
N.B. – Le dessin de gauche nous semble correspondre à une vue plus « naturelle » d’un cube ; c’est parce que nous avons l’habitude de voir la plupart des objets en vue légèrement plongeante. Nous nous conformerons à cette habitude, en utilisant un dessin de ce type pour représenter un cube.
– Nous avons vu que l’ombre d’un cube pouvait être très allongée, selon l’obliquité des rayons solaires par rapport au plan de l’ombre ; mais un dessin tel que celui ci-dessous, quoique tout à fait acceptable théoriquement, nous apparaît plutôt comme celui d’une barre que comme celui d’un cube :

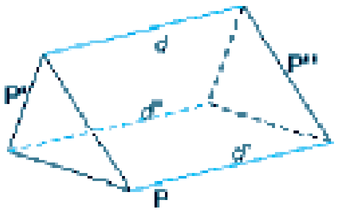
C’est ce qui explique pourquoi, dans les perspectives parallèles usuelles, on représente les arêtes obliques (« fuyantes ») plus courtes que les arêtes en vraie grandeur, même si aucune raison physique ou géométrique ne le justifie.

La perspective parallèle

Prérequis

Ils sont volontairement très limités et suffisent pour les objectifs fixés :
– une droite qui a deux points dans un plan est tout entière dans ce plan ;
– un plan est déterminé par trois points non alignés[6] ;
– l'intersection de deux plans non parallèles est une droite ;
– si un plan coupe un autre plan P selon la droite d, alors il coupe tout plan parallèle à P selon une droite parallèle à d ;
– deux droites parallèles sont deux droites situées dans un même plan et parallèles dans ce plan ;
– théorème « du toit » : si trois plans sont sécants deux à deux, alors les trois droites d'intersection sont concourantes ou parallèles ;
– dans tout plan de l'espace, tout théorème de géométrie plane est vrai.

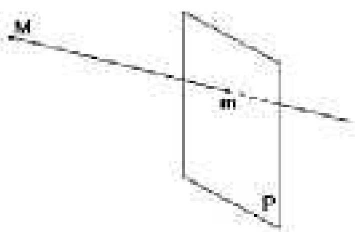




Démonstration possible du « théorème du toit » (disjonction des cas et raisonnement par l'absurde). [■ Logique]
On appelle d la droite d'intersection des plans P' et P'', d' la droite d'intersection des plans P'' et P, d'' la droite d'intersection des plans P et P'[7].
a) Si les droites d' et d'' sont sécantes, leur point d'intersection I appartient au plan P'' (qui contient d') et au plan P' (qui contient d'') ; il appartient donc à leur droite d'intersection d. Donc les droites d, d' et d'' sont concourantes en I.
b) Si les droites d' et d'' sont parallèles, supposons que les droites d et d' se coupent en un point I. Alors, par le même raisonnement qu'au a), les droites d, d' et d'' sont concourantes, ce qui contredit l'hypothèse.

Définition

L'ombre au soleil correspond à la transformation géométrique suivante : soient un plan P et une droite d non parallèle à P. À tout point M de l'espace, on fait correspondre le point m, intersection du plan P avec la parallèle à d passant par M :



Cette transformation est appelée perspective parallèle sur le plan P parallèlement à la droite d. Le plan P est le plan de projection de la perspective, et la direction de d est sa direction.

N.B. – Le plan de projection est supposé vertical ; il correspond à un mur sur lequel est portée l'ombre des objets (voir plus haut l'interprétation du dessin d'un cube comme l'ombre d'un cube fixé au mur). La droite d représente la direction des rayons solaires.

Suzuki Harunobu,
Huit vues : le carillon du soir à la pendule, 1766.
Art Institute of Chicago
États-Unis.

6. … ou par une droite et un point non situé sur cette droite, ou par deux droites sécantes, ou par deux droites parallèles distinctes.

7. Les dessins ci-dessus sont réalisés en perspective parallèle, que nous n'avons certes pas encore définie mais qui est couramment utilisée depuis des années par les élèves ; on pourra donc les considérer, pour l'instant, comme de simples schémas illustratifs.

On peut, en particulier, trouver ce procédé de représentation[8] dans les représentations d'objets figurant dans beaucoup d'œuvres d'art asiatiques, comme les miniatures persanes et indiennes, les estampes japonaises du type *ukiyo-e*[9] (« images du monde flottant »)… C'est aussi celle qu'on utilise dans l'étude de la géométrie de l'espace.

Propriétés de la perspective parallèle

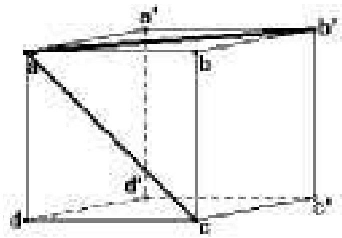
Certaines des propriétés ci-dessous ont déjà été rencontrées lors de la synthèse sur les propriétés de l'ombre au soleil ; on se contentera donc de les rappeler.
1) L'image d'un segment est un segment. On dit que la perspective parallèle « conserve » l'alignement (déjà vu).
2) Tout objet situé dans un plan parallèle à P a une image « en vraie grandeur ». Les angles et les distances sont alors conservés, et tout segment parallèle à P a pour image un segment parallèle (déjà vu). Un objet parallèle au plan de projection est dit frontal.
3) La perspective parallèle « conserve » le milieu et plus généralement les rapports de longueurs sur une même droite (déjà vu). Conséquences :
4) L'image d'un parallélogramme est un parallélogramme.
Démonstration : Soit un parallélogramme ABCD et son image abcd.
Les segments [AC] et [BD] ont même milieu I, donc les segments [ac] et [bd] ont même milieu i (conservation du milieu). Par conséquent abcd est un parallélogramme.
5) La perspective parallèle « conserve » le parallélisme. Ceci signifie que les images de deux droites parallèles sont deux droites parallèles, ce qui est une conséquence immédiate de la propriété précédente.

N.B. – La conservation du parallélisme est le moyen le plus visible permettant de distinguer, au premier coup d'œil, la perspective parallèle de la perspective à point de fuite. Une conséquence en est que la taille des représentations des objets reste la même, qu'ils soient situés au premier plan ou à l'arrière-plan. Ainsi, dans les estampes japonaises, les personnages ont tous la même taille, quelle que soit leur situation dans l'espace.

6) À chaque direction correspond un « rapport de réduction ».

Soit un segment [MN], d'image [mn]. Posons $\frac{\mathrm{mn}}{\mathrm{MN}} = k$(où k est un réel positif).
Soit [PQ] un segment parallèle à [MN]. Le dessin [pq] du segment [PQ] est parallèle à [mn] et, comme le rapport est conservé, on a $\frac{\mathrm{pq}}{\mathrm{mn}} = \frac{\mathrm{PQ}}{\mathrm{MN}}$. On en déduit $\frac{\mathrm{pq}}{\mathrm{PQ}} = \frac{\mathrm{mn}}{\mathrm{MN}} = k$.
Le réel positif k, quotient de la longueur de l'image d'un segment par celle de ce segment, est donc le même pour tout segment parallèle à (MN) ; on l'appelle le rapport de réduction selon la direction de (MN).

N.B. – D'après la remarque 2, cette appellation est trompeuse, car rien n'empêche un rapport de « réduction » d'être supérieur à 1. C'est d'ailleurs le cas sur le dessin ci-contre : dans l'espace, on a AC = AB', car sont deux diagonales de faces du cube représenté. Mais sur le dessin on constate que ab' > ac.
Or [ac] est dessiné en vraie grandeur car la face ABCD est dessinée sous la forme d'un carré. Donc le dessin du segment AB' a une longueur supérieure à la longueur réelle du segment [AB'].



8. C'est ce qu'on appelle la *perspective cavalière* : à proprement parler, le qualificatif de « cavalière » devrait être réservé au cas particulier où l'une des faces d'un cube de référence est dans le plan P (c'est-à-dire celui que nous avons étudié au début) ; dans la pratique, il s'est étendu à toute perspective parallèle dont la direction d n'est pas perpendiculaire au plan P.

9. Par opposition aux estampes du type *uki-e*, qui font usage de la perspective centrale (« à point de fuite »), introduite au Japon par les Européens, *via* la Chine, au XVII[e] siècle.

On voit finalement que les propriétés ci-dessus, généralement présentées comme des conventions du dessin en perspective parallèle, ne sont en réalité autre chose que des propriétés d'une transformation géométrique modélisant l'ombre au soleil sur un plan.
Cette préservation de certaines propriétés permet un passage relativement facile de l'objet au dessin qui le représente, et même inversement, à condition néanmoins de prendre quelques précautions : par exemple, ce n'est pas parce que les dessins de trois points sont alignés que ces points le sont; mais on peut dire que, si les dessins de trois points ne sont pas alignés, alors les points ne le sont pas [■ Logique].
D'où l'intérêt de la perspective parallèle comme dessin technique : tout en étant assez proche de la vision, elle permet – mieux, et surtout plus aisément, que la perspective centrale – de faire des conjectures sur l'objet à partir de constatations et de mesures sur le dessin, voire d'en démontrer des propriétés et d'opérer des contrôles (voir les applications ci-après).

N.B. – Cependant, certaines propriétés ne sont pas conservées :
– les rapports de réduction dans deux directions différentes ne sont pas égaux (voir par exemple le dessin des faces inférieure et supérieure du cube, qui n'ont a priori aucune raison d'être des losanges);
– la perpendicularité, et par conséquent, de façon générale, les angles (idem : les dessins des faces ne sont pas des rectangles).
Ceci permet aussi d'expliquer pourquoi un plan est représenté par un parallélogramme: comme il est impossible de représenter en entier une droite en géométrie du plan, on n'en représente qu'un segment; de même, il est impossible de représenter un plan en entier en perspective parallèle, aussi a-t-on décidé conventionnellement de n'en représenter qu'un rectangle (sous la forme d'un parallélogramme, d'après ce qui précède).

7) Une dernière propriété présente le dessin d'un cube – ou d'un « coin de pavé droit » – comme un élément nécessaire et suffisant pour représenter l'espace; il n'est pas question de la démontrer, mais on fera remarquer aux élèves, grâce aux dessins d'application qu'ils réaliseront, qu'il en est bien ainsi.
Une perspective parallèle est entièrement déterminée par la perspective d'un cube.
Soit O l'un des sommets du cube et I, J, K les sommets qui lui sont adjacents.
Alors $(O; \overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OJ}; \overrightarrow{OK})$ est un repère (orthonormal) de l'espace. Soit M un point quelconque de l'espace et soient $(x ; y ; z)$ ses coordonnées dans ce repère.
On a $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{OI} + y\overrightarrow{OJ} + z\overrightarrow{OK}$.
On en déduit $\overrightarrow{om} = x\overrightarrow{oi} + y\overrightarrow{oj} + z\overrightarrow{ok}$ (conservation du rapport sur une droite), relation qui permet de placer m dans le plan de projection.
Ceci signifie que, dès que l'image d'un cube est donnée, on n'a plus de choix pour représenter n'importe quel objet de l'espace : son image ne pourra s'obtenir que par des constructions géométriques.

N.B. – La perspective cavalière est un cas particulier de perspective parallèle, dans laquelle une face du cube de référence est frontale (c'est-à-dire parallèle au plan de projection).

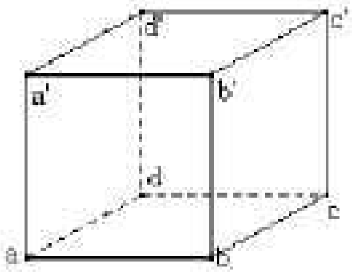
Applications au dessin

Cette partie est importante et ne doit pas être négligée, car elle constitue le but de ce chapitre du programme, en permettant aux élèves de mettre en œuvre, de façon consciente, les propriétés de la perspective parallèle, et de se rendre compte, d'une part que le dessin est le résultat d'une construction, et d'autre part qu'il est toujours possible de contrôler le résultat obtenu. En fait, comme on a pu le dire à propos des arbres de probabilités, un dessin correct, accompagné de son programme de construction, constituera une preuve de la bonne mise en œuvre des propriétés géométriques de la perspective.

Application 1 : dessin en perspective cavalière d'une pyramide régulière à base carrée

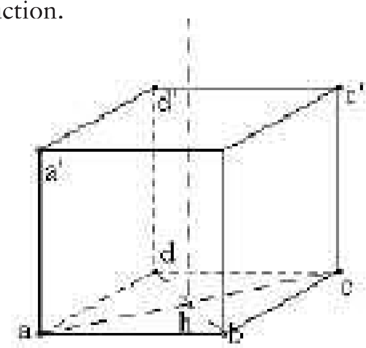
Soit une pyramide régulière de sommet S dont la base est un carré ABCD de côté *l*. Soit H le centre de la base; on pose SH = *m*. On veut dessiner cette pyramide en perspective cavalière.

Pour cela, supposons que le carré ABCD est la face inférieure (horizontale) d'un cube fixé au tableau par sa face arrière (CDD'C' par exemple). Ce cube sera notre cube de référence, et nous supposerons que sa face ABB'A' est frontale. Le dessin de ce cube sera du type ci-dessous.



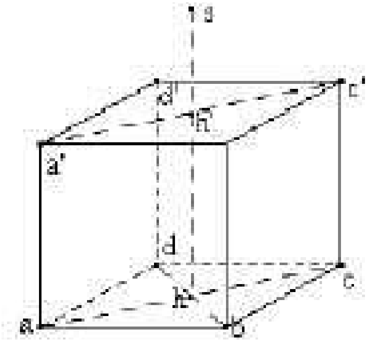
Le dessin du centre H du carré ABCD sera le centre du parallélogramme abcd (conservation du milieu). En outre, la hauteur [SH] de la pyramide est verticale, donc parallèle au côté [AA'] du cube. Son image lui sera par conséquent parallèle. Donc le point s sera sur la parallèle à (aa') passant par h.

N.B. – Deux types de pointillés différents ont été utilisés, pour les arêtes cachées et pour les traits de construction.



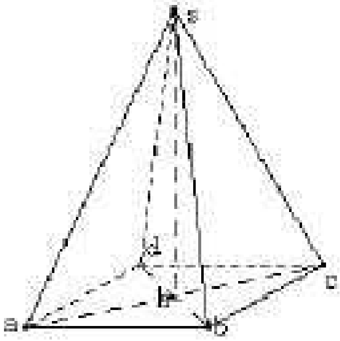
Soit H' le centre de la face supérieure du cube. Le segment [HH'] est parallèle au plan du tableau, donc son image est en vraie grandeur et on a hh' = aa' = l (ce qu'on peut contrôler par le fait que ahh'a' est un parallélogramme).

Puisque la perspective parallèle conserve le rapport sur une même droite et que hs = m (vraie grandeur), on aura hs = $\frac{m}{l}$ hh', ce qui permet de placer le point s.



Il ne restera plus alors qu'à dessiner les arêtes latérales et à représenter les arêtes cachées en pointillé.

N.B. – Comme on le voit sur le dessin ci-contre, le recours au dessin du cube est finalement inutile : il suffit de dessiner la base (sous forme de parallélogramme), de placer h puis de tracer (sh) perpendiculaire à (ab). Le point s s'obtient par hs = $\frac{m}{l}$.ab (puisque le segment [ab] est représenté en vraie grandeur).



Application 2 : dessin de l'intersection d'un cube et d'un plan

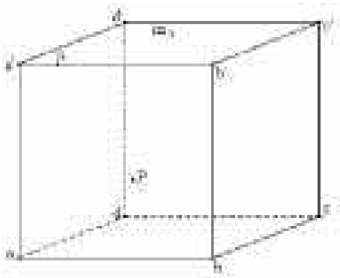
Ce type d'exercices a été effectué en classe de seconde, mais il s'agit ici de les reprendre de façon raisonnée en distinguant bien, dans la réalisation du dessin, d'une part ce qui relève des propriétés d'incidence de plans et de droites et d'autre part ce qui relève des propriétés de la perspective cavalière. On s'attachera également à mettre en évidence les moyens de contrôle du dessin. Au cours de la démarche, on se situera donc alternativement :

– dans une géométrie du dessin (et dans une problématique de précision des tracés) ;
– dans une géométrie théorique (et dans une problématique de la rigueur, au sens de : conformité aux règles de la théorie).

Ces deux paradigmes géométriques étant susceptibles de se contrôler l'un l'autre sur la « figure » (ou plus exactement le dessin).

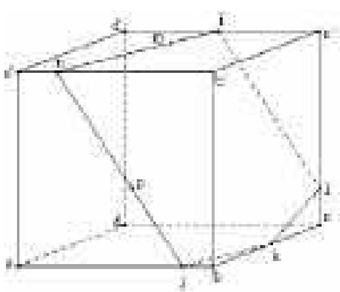
Exemple

Le cube est dessiné en perspective cavalière. Le point M est dans la face supérieure A'B'C'D', le point N sur l'arête [A'B'], le point P dans la face avant ABB'A'. Il s'agit de dessiner l'intersection du cube avec le plan (MNP).



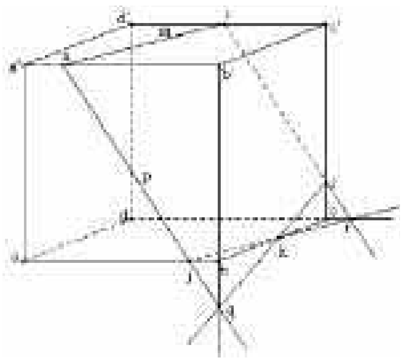
On peut construire, dans l'ordre :

– les intersections du plan avec les faces avant et supérieure du cube, d'où les points I et J (intersections du plan avec les arêtes [C'D'] et [AB]) ;
– l'intersection du plan avec la face inférieure (d'où le point K) ;
– l'intersection du plan avec la face arrière (d'où le point L).



N.B. – On a obtenu ici une section pentagonale, mais ce pentagone ne saurait être régulier (parallélisme de certains côtés) ; par contre, il est possible d'obtenir une section à trois, quatre ou six côtés qui soit un polygone régulier.

Contrôles possibles
1) Les droites (NJ) et (KL) sont toutes deux dans le plan (MNP) ; soit Q leur point d'intersection. Puisque la droite (NJ) est située dans le plan (ABB'A'), le point Q est dans ce plan. De même, puisque la droite (KL) est située dans le plan (BCC'B'), le point Q est dans ce plan.
Le point Q est donc situé sur l'intersection des plans (ABB'A') et (BCC'B'), c'est-à-dire sur la droite (BB').
Conclusion : les droites (NP), (BB') et (KL) sont concourantes, et il en va de même de leurs perspectives (np), (bb') et (kl).

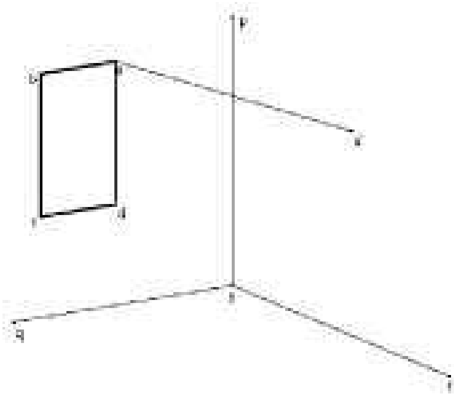


2) De même, les droites (jk), (cd) et (il) sont concourantes.

N.B. – On aurait pu tout aussi bien partir du concours de certaines droites d'intersection (voir contrôle ci-dessus) pour réaliser la construction, et utiliser le parallélisme pour la contrôler.

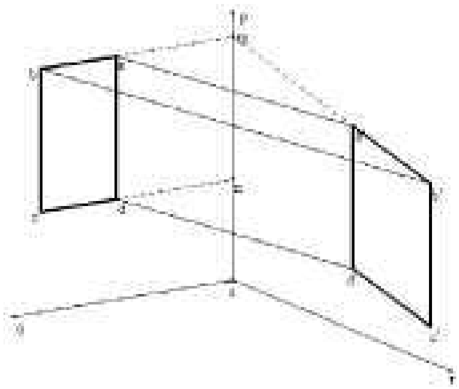
Application 3 : dessin en perspective parallèle de l'ombre au soleil d'une fenêtre sur un mur d'une pièce

Il s'agit ici d'une « perspective parallèle de perspective parallèle », puisque l'ombre au soleil est, on l'a vu, une perspective parallèle, et qu'on va dessiner cette ombre en perspective parallèle. Il en résulte en particulier que les propriétés de conservation de la perspective parallèle seront encore vraies dans le passage au dessin de l'ombre. Si cela est possible, on ne se privera pas de contrôler visuellement certaines assertions en observant l'ombre au soleil des fenêtres de la classe sur les murs, par exemple les bords verticaux des fenêtres ont toujours une ombre verticale sur un mur vertical.
La fenêtre considérée est un rectangle ABCD ; son dessin abcd est donc un parallélogramme. Sur le dessin ci-dessous, on a représenté[10] l'image [aa'] du rayon solaire qui passe par A et qui vient frapper le mur en A'. On cherche à dessiner l'ombre A'B'C'D' de la fenêtre sur le mur PRS.

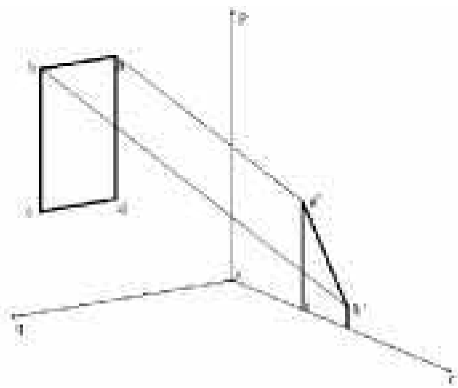


10. L'utilisation d'un logiciel de géométrie dynamique permet de faire varier l'inclinaison des rayons solaires et d'observer la variation concomitante de l'ombre.

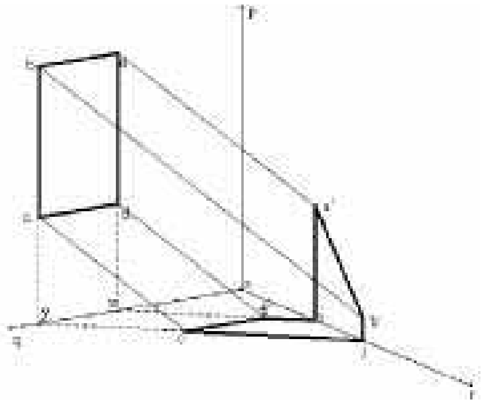
N.B. – Avec notre convention de notation, les points sont notés en majuscules et leurs dessins en minuscules. D'autre part, l'ombre sur le mur de droite d'un point X est notée X'.
– Les rayons solaires ne sont pas horizontaux (prolonger [ba] jusqu'à son intersection m avec [sp], puis comparer les directions des droites coplanaires (ma') et (sr)).
– Les ombres des côtés verticaux de la fenêtre sont verticales et en vraie grandeur, ce qui permet de dessiner l'ombre D' du point D. (Toute droite verticale est parallèle à tout plan vertical, donc parallèle à son ombre sur un tel plan… c'est-à-dire verticale.)
– La droite (AB) coupe la droite (PS) en M; la droite (CD) coupe l'arête [PS] en N. Supposons qu'on élargisse la fenêtre jusqu'à obtenir une fenêtre rectangulaire BMNC. Cet artifice permet de dessiner l'ombre du point M (qui n'est autre que M, car M est sur le mur PRS).
– On en déduit le dessin de l'ombre B' du point B sur le mur PRS (le point B' est sur (M'A') par conservation de l'alignement et sur la parallèle à (AA') passant par B par conservation du parallélisme).
– On peut alors terminer le dessin de l'ombre de la fenêtre (conservation du parallélisme : on complète le parallélogramme a'b'c'd').
– Il existe deux possibilités de contrôle – au moins – du dessin obtenu : dessiner le rayon solaire passant par c, ou vérifier l'alignement de n, c', d'. Bien entendu, ces propriétés auront pu être utilisées auparavant par certains élèves pour réaliser leurs constructions. Ce qu'il est important de montrer, c'est qu'on a toujours la possibilité de contrôler son dessin. On peut aussi intervertir construction et contrôle.



Si le soleil est plus haut, il est possible qu'une partie de l'ombre de la fenêtre soit sur le sol. C'est le cas sur le dessin ci-dessous, où l'on s'aperçoit que les points C et D ont une ombre sur le sol, mais pas sur le mur :



Pour obtenir cette ombre, on peut se placer dans le plan vertical contenant le rayon (AA']. Ce plan coupe celui du sol selon [XI] (voir ci-dessous). L'ombre D' du point D est le point où le rayon solaire passant par D coupe [XI]. On obtient l'ombre C' du point C par le même procédé.
Contrôle : (c'd') est parallèle à (cd) (car [CD] est horizontal, donc parallèle au sol).



Classe terminale – la perspective centrale

L'enseignement de l'option de la classe de première a muni les élèves d'un certain nombre de résultats de géométrie de l'espace, et en particulier des théorèmes régissant les positions relatives des droites et des plans. Ils disposent également d'un moyen commode de représentation de l'espace, utilisé non seulement en géométrie mais également dans certaines professions : la perspective parallèle. Les élèves vont maintenant aborder un autre mode de représentation, qui fait son apparition au XV^{e} siècle en Italie (Brunelleschi, Alberti…), puis dans les pays du Nord (Albrecht Dürer, Jean Pélerin dit Viator, Abraham Bosse…), et qui a régi les arts graphiques pendant près de cinq cents ans : la perspective centrale, encore appelée perspective artificielle, ou perspective linéaire, ou perspective à point de fuite, ou perspective vraie, ou perspective des peintres… N'oublions pas non plus les progrès que cette perspective a fait réaliser à la géométrie, en particulier avec les travaux de Girard Desargues, disciple du graveur Abraham Bosse qui est à l'origine de la géométrie projective.

L'étude peut se décomposer en plusieurs temps :

– étude expérimentale de l'ombre dite « au flambeau » ;
– étude de la « fenêtre de Dürer » ;
– étude géométrique de la projection centrale sur un plan ;
– mise en œuvre de la perspective centrale.

Dans l'option de la classe de première, la perspective parallèle a été introduite comme une modélisation géométrique du phénomène de l'ombre portée par le soleil sur un plan. Nous allons cette fois, tout en suivant la même démarche, remplacer le soleil (que nous avions supposé « à l'infini ») par une source lumineuse, supposée ponctuelle, située à distance finie, afin d'étudier l'ombre qu'elle porte sur un plan donné (c'est ce qu'on appelle l'ombre « au flambeau »); pour fixer les idées et par analogie avec ce qui a été fait pour l'ombre au soleil, nous supposerons ici que ce plan est le sol (horizontal). Dans un premier temps, les élèves pourront, en travail personnel, s'intéresser aux principales propriétés de l'ombre portée sur le sol par une source lumineuse unique (lampe, lampadaire…) et en particulier chercher à savoir si les propriétés déjà rencontrées pour l'ombre au soleil sont encore vérifiées par l'ombre au flambeau. Une synthèse faite en classe pourra ensuite permettre de résumer les principales observations. Pour justifier les propriétés conjecturées, on réalise des dessins dans des plans qui seront précisés, dessins qui conduiront à un modèle géométrique et permettront, le cas échéant, d'effectuer des démonstrations de géométrie plane.

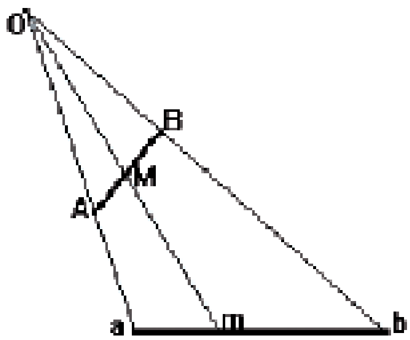
L'ombre au flambeau

Il s'agit ici d'une synthèse faite à partir des observations personnelles des élèves. On opère ici le passage de l'ombre au dessin et on poursuit l'étude des propriétés, que l'on applique à la résolution de problèmes de dessin.

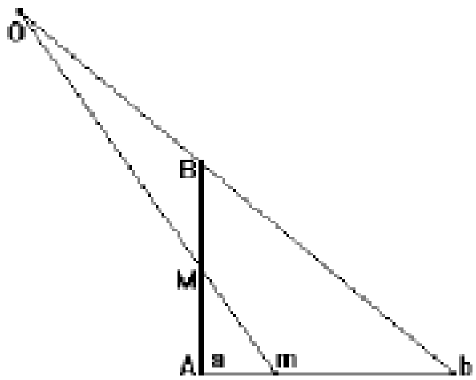
La lumière émise par la source lumineuse (notée O) se propage en ligne droite. L'observation permet aussi de poser que :

– les rayons lumineux divergent à partir de la source. Ceci est également vrai dans le cas du soleil mais, étant donné son éloignement, nous avons alors admis leur parallélisme ;
– l'ombre d'un segment est un segment.

Soit [AB] un segment et [ab] son ombre. Le schéma réalisé dans le plan du triangle OAB (schéma qu'on pourra comparer avec celui réalisé dans le cas de l'ombre au soleil) est du type ci-dessous. Les proportions sont-elles conservées sur l'ombre du segment ? On peut certes vérifier (par mesure) que cela ne semble pas être le cas sur le dessin, mais on peut également le démontrer, par exemple de la façon suivante.



Soit un piquet [AB] planté verticalement dans le sol (horizontal) au point A. Son ombre portée par la source O est le segment [ab] (avec a = A). Soit M le milieu de [AB] et m son ombre.
Si m est le milieu de [ab], on est dans la configuration de la droite des milieux et on en déduit que (Mm) est parallèle à (Bb), ce qui est contraire à l'hypothèse que ces deux droites se coupent en O.



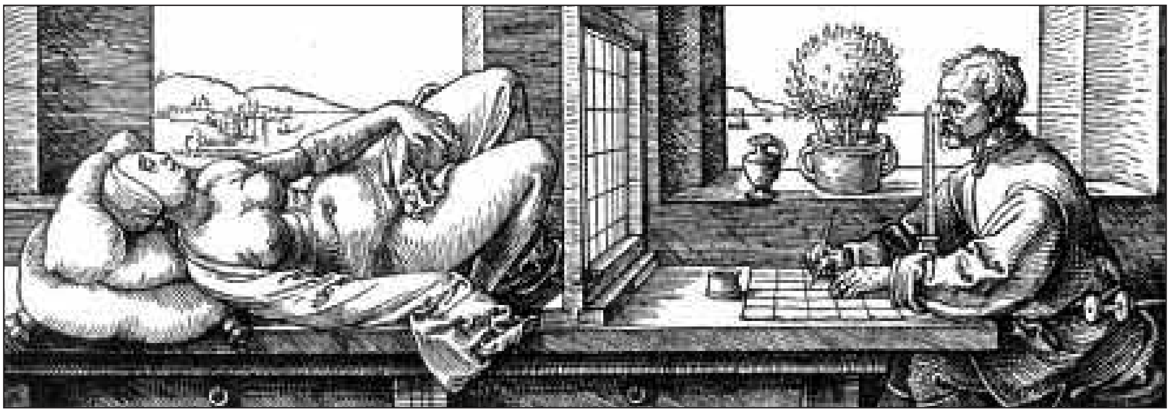
La conservation des milieux étant mise en défaut sur ce contre-exemple, on peut conclure qu'elle n'est pas réalisée pour l'ombre au flambeau, et donc qu'il n'y a pas, généralement, conservation du rapport dans une direction donnée (contrairement à ce qui se passe pour l'ombre au soleil), ni conservation du parallélisme. [■ Logique]
L'utilisation d'un dispositif simulant le phénomène de l'ombre au flambeau s'avère fort utile comme support matériel pour les conjectures et les démonstrations des propriétés de la perspective centrale (voir en annexe).

De l'ombre au dessin : la « fenêtre de Dürer »

Les arts graphiques de la Renaissance se proposaient de représenter l'espace sur une surface plane, de façon que, pour l'observateur, l'œuvre puisse se superposer à la réalité (voir l'expérience de Brunelleschi au baptistère de Florence), et c'est dans ce but que fut inventée la perspective « artificielle ». Le principe sur lequel se fondèrent alors les artistes peut être réalisé par un dispositif qui a été représenté par Albrecht Dürer dans quatre de ses gravures sur bois[11] ; il s'agit d'un appareil qui a effectivement été utilisé par les artistes[12], mais qui est, dans la pratique, d'un maniement assez lourd. Il s'agit

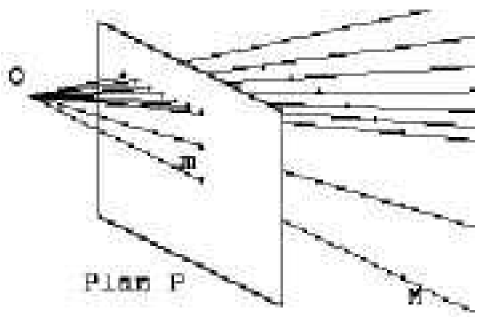
11. Voir par exemple *The Complete Woodcuts of Albrecht Dürer*, édité par W. Kurth. Editions Dover, New York 1963 (nos 337 à 340).
12. On le voit ainsi utilisé par le héros du film *Meurtre dans un jardin anglais (The Draughtsman's Contract)*, de Peter Greenaway (1982).

néanmoins d'un outil pédagogique intéressant, en ce sens qu'il constitue une réalisation concrète de la théorie élaborée par les artistes du Quattrocento italien. On pourra, selon les possibilités, soit faire utiliser une telle fenêtre par les élèves (dessin sur la vitre), soit étudier les gravures de Dürer dans le but d'en préciser le fonctionnement.



La « fenêtre » d'Albrecht Dürer : illustration extraite des *Instructions sur l'art de mesurer* (1525).

Schématiquement, on peut décrire ainsi le dispositif (voir en annexe) :
– la position de l'œil de l'opérateur[13] est fixée grâce à un œilleton ;
– une « fenêtre » fixe est placée entre cet œil et l'objet à représenter[14].
Tout point de l'objet sera alors représenté par l'intersection du rayon lumineux joignant ce point à l'œil avec le plan de la fenêtre (N.B. : ce rayon lumineux peut, le cas échéant, être matérialisé par un fil tendu entre le point et l'œilleton.).
La « situation visuelle » peut être modélisée par un point O (l'œilleton) et un plan P (la fenêtre). Le dessin d'un point M de l'espace sera le point d'intersection m de la droite (OM) avec le plan P.
On voit que cette situation est comparable à celle de l'ombre au flambeau :



– à l'œilleton correspond la source lumineuse (O) ;
– à la fenêtre correspond le sol (P) ;
– l'image d'un point M (ombre ou dessin) s'obtient comme intersection de (OM) avec le plan P.
Deux différences cependant :
– dans le cas de l'ombre, l'objet est situé « entre » le point O et le plan P, tandis que dans le cas du dessin il est situé de l'autre côté de O par rapport à P ;
– dans le cas de l'ombre, le plan P a été supposé horizontal, tandis que dans celui du dessin il est en principe vertical (c'est le plan du tableau).

13. Cet œil est unique : l'artiste cligne de l'œil pour viser.
14. Cette fenêtre peut éventuellement être constituée d'une grille permettant le repérage des points intéressants.

En étendant l'étude à l'espace entier et en ne prenant pas en compte la direction du plan P (qui dans un cas comme dans l'autre peut bien être quelconque) nous pouvons unifier les deux situations sous un modèle géométrique commun : la perspective centrale.

La perspective centrale

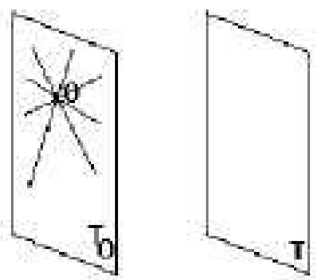
Définition

Comme on l'a fait en classe de première pour l'ombre au soleil, on peut maintenant associer à ces deux situations la transformation géométrique suivante.
Soit un point O et un plan T donnés (tels que O n'est pas dans T). À tout point M de l'espace on associe (lorsque c'est possible) le point m, intersection de la droite (OM) avec le plan T. En mathématiques, cette transformation est appelée projection sur T de centre O, et le point m est le projeté de M ; dans les arts du dessin, on l'appelle perspective de point de vue O et de plan du tableau T, et le point m est l'image de M. De plus, dans ce cas on se limite à considérer les points situés dans le demi-espace contenant T et limité par le plan TO parallèle à T passant par O.
Dans ce qui suit, c'est cette dernière terminologie qui est utilisée et, pour faciliter l'étude, c'est l'espace tout entier qui est considéré. En outre, le plan du tableau est supposé vertical (ce qui est de loin le cas le plus fréquent dans les arts graphiques). Enfin, comme en première, l'image d'un point sera notée par la lettre minuscule correspondante.

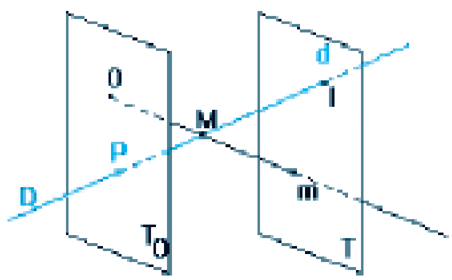
Propriétés de la perspective centrale

Y a-t-il des points qui n'ont pas d'image ?
D'après la définition, ce sont les points M tels que (OM) est parallèle à T. Ce sont donc les points du plan TO défini ci-dessus.

Quelle est l'image d'une droite D ?
L'exploration (faire pivoter D autour du point O) permettra de remarquer que :
– Si D est incluse dans T_O, elle n'a pas d'image ; sinon, tous ses points ont une image, sauf son intersection éventuelle avec T_O.

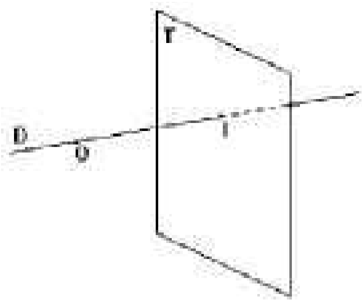


Les droites situées dans T_O n'ont pas d'images

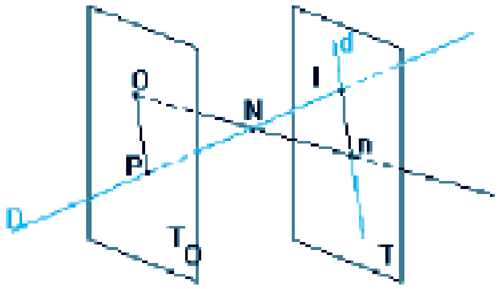


Le point M a pour image m.
Le point I est sa propre image.
Le point P n'a pas d'image.

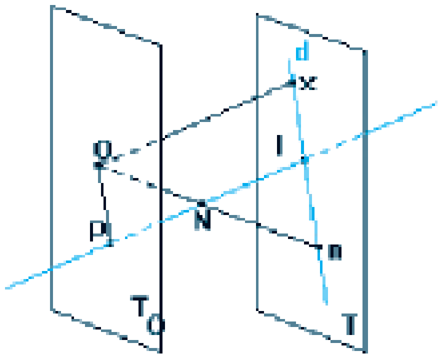
– Si D passe par O, alors son image se réduit au point d'intersection de D avec le plan du tableau (si ce point existe).



– Dans les autres cas, toutes les images des points de D sont alignées sur une droite d, qui est l'intersection du plan du tableau avec le plan défini par O et D (plan que nous notons (O, D));
La droite D perce le plan T en I et le plan T_O en P.
La droite d est parallèle à (OP).

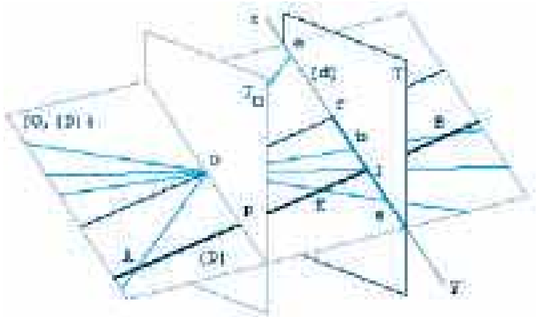


Tous les points de d sont-ils l'image d'un point de D ?
Soit n un point de la droite d. Il est l'image du point N de la droite D qui appartient à la droite (On). Donc le point N existe si – et seulement si – les droites D et (On), qui sont toutes deux dans le plan (O, D), sont sécantes.
Conclusion : il y a un seul point de d qui n'est pas image d'un point de D ; c'est l'intersection x du plan du tableau T avec la parallèle à D passant par le point de vue O.

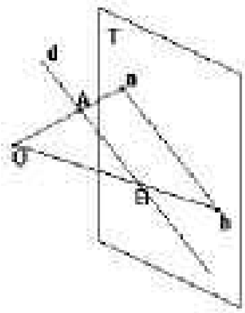


N.B.
– On peut observer (grâce à un logiciel de géométrie, par exemple) que, plus le point N s'éloigne sur D (dans un sens ou dans l'autre), plus son image n se rapproche du point x. C'est pourquoi on dit parfois que le point x est l'image du point à l'infini de la droite D. Cette étude « dynamique » de l'évolution d'un point de D et de son image sur d permettra également d'observer que l'image d'un segment [AB] est le segment [ab].
– Les points de la demi-droite [Ix) situés au-delà du point I correspondent aux images de points situés derrière l'observateur ; n'étant pas « vus », ils ne sont pas dessinés.
– Le point I où la droite D perce le plan du tableau est sa propre image (de façon générale, tout point du plan du tableau est sa propre image).

Voici un autre dessin, toujours en perspective parallèle, récapitulant ce qui précède :
La droite (D) perce le plan T_O en P et le plan du tableau T en I.
La droite (d) est l'intersection du plan T du tableau et du plan (O, D)).
Le point P n'a pas d'image car (OP) // T.
Le point f de (d) tel que (Of) est parallèle à (D) n'est l'image d'aucun point de (D).
Le point I est le seul point de (D) qui est sa propre image.
Un point A de (D) situé devant T_O a son image a sur la demi-droite [fz) qui ne sera pas dessinée car l'œil ne peut pas regarder les deux points en même temps.
Un point B situé derrière T a son image b sur le segment [If [.



Quand A ou B partent à l'infini, leurs images a et b se rapprochent de f sans l'atteindre : le point E situé entre T_O et T a son image sur la demi-droite [I y).
Quand E ou A se rapprochent de P, leurs images a et e partent à l'infini : on dit parfois que P a pour image le point à l'infini de la droite (d).
Si D est strictement parallèle au plan du tableau et si elle a pour image la droite d, cette droite est parallèle à D
En effet, les droites D et d sont coplanaires – dans le plan (O, D) – et n'ont aucun point commun.

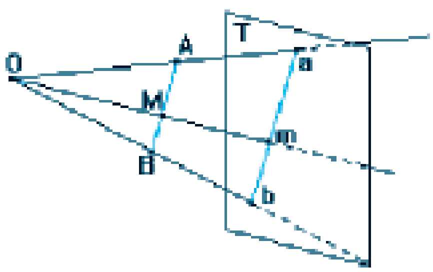


N.B. – Dans ce qui suit on suppose, sauf mention contraire, que toutes les droites considérées ont pour image une droite, c'est-à-dire qu'elles ne passent pas par O et ne sont pas situées dans le plan T_O.

Y a-t-il conservation du milieu ?

Nous avons vu sur l'exemple de l'ombre au flambeau qu'il n'en est rien en général. Mais il y a néanmoins conservation du rapport – et donc du milieu – pour les segments parallèles au plan du tableau (segments dits frontaux), comme le montre le schéma ci-dessous.
La droite (AB) est parallèle au plan du tableau. On reconnaît une « double » configuration de Thalès du triangle, qui permet d'écrire en particulier :

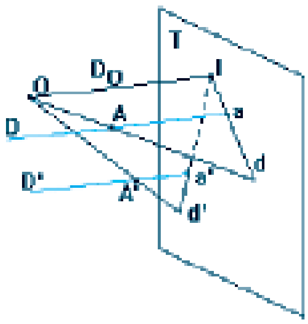
$\frac{am}{AM} = \frac{ab}{AB} = \frac{Oa}{OA}$, d'où l'on tire immédiatement $\frac{am}{ab} = \frac{AM}{AB}$.



Conséquence : l'image d'un objet situé dans un plan parallèle au plan du tableau n'est pas déformée (et c'est heureux : penser à la projection de diapositives ou d'un film).

Images de deux droites parallèles

Soient D et D’ deux droites parallèles (ne passant pas par O) et soient d et d’ leurs images respectives. Les droites d et d’ sont coplanaires (dans le plan du tableau). Sont-elles parallèles ?
D’après ce qui vient d’être vu :
– la droite d est l’intersection du plan du tableau et du plan (O, D) ;
– la droite d’ est l’intersection du plan du tableau et du plan (O, D’).
Les plans (O, D) et (O, D’) ont en commun le point O ; ils sont donc sécants ou confondus. S’ils sont confondus, il en va de même des droites d et d’ ; s’ils sont sécants, le « théorème du toit » nous dit que leur droite d’intersection DO est la parallèle à D (et à D’) passant par O.

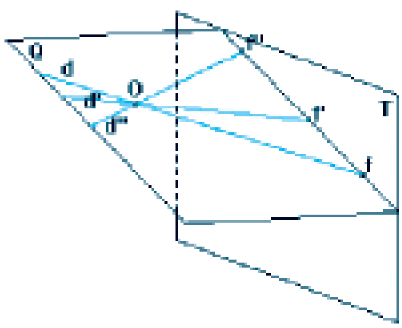


Deux cas sont alors possibles :
– soit DO est parallèle au plan du tableau (ce qui signifie que D et D’ le sont) et alors d et d’ sont parallèles ;
– soit DO perce le plan du tableau en un point I et alors d et d’ se coupent en ce point.
Conclusions :
– les droites images de deux droites D et D’, parallèles entre elles et au plan du tableau, leur sont parallèles ;
– les droites images de deux droites parallèles D et D’ sécantes au plan du tableau sont sécantes en un point qui est l’intersection du plan du tableau avec la parallèle à D et D’ passant par le point de vue O.
Conséquence : soit une droite donnée D sécante au plan du tableau. Toutes les droites images des droites parallèles à D passent par un même point, appelé point de fuite de la droite D. On peut ici remarquer (voir plus haut) que le point de fuite est l’image du point à l’infini de D et de toutes les droites qui lui sont parallèles.

N.B. – Le point de fuite des droites perpendiculaires au plan du tableau est appelé point de fuite principal. Ce point (que nous noterons ω) est donc le projeté orthogonal du point de vue O sur le plan du tableau.

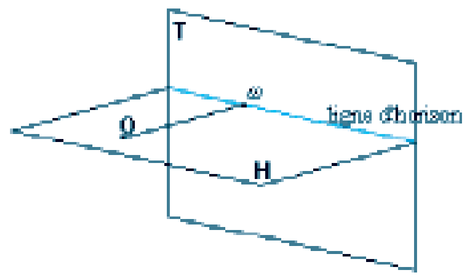
Images de droites coplanaires

– Soient des droites D, D’, D”… parallèles à un même plan P. On suppose que toutes trois ont un point de fuite, respectivement f, f’, f”… Ceci impose que le plan P soit sécant au plan du tableau.
On a vu que les points de fuite sont les intersections, avec le plan du tableau, des droites parallèles à D, D’, D”… passant par O. Ces droites, d, d’, d”… sont incluses dans le plan Q, parallèle à P passant par O, et les points de fuite sont donc sur la droite d’intersection de Q avec le plan du tableau (qui existe puisque Q est parallèle à P).

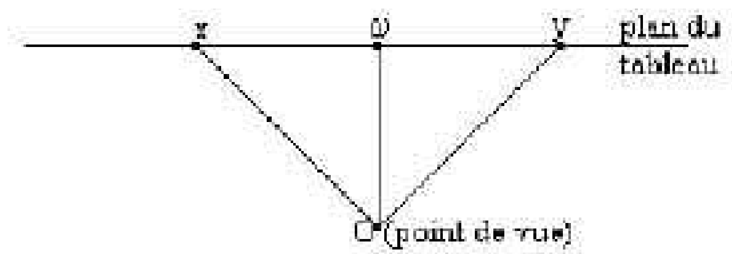


Inversement, tout point de cette droite d'intersection est le point de fuite d'au moins une droite du plan Q (on peut la déterminer).
Conclusion : les points de fuite de toutes les droites parallèles à un plan P constituent une droite, appelée ligne de fuite du plan P. Cette droite est l'intersection du plan du tableau avec le plan parallèle à P passant par le point de vue.
– Soit P' un plan parallèle à P. Alors le plan parallèle à P' passant par O n'est autre que Q ; donc P' a la même ligne de fuite que P.
Conclusion : deux plans parallèles ont la même ligne de fuite.
En particulier, toutes les droites horizontales ont leur point de fuite sur la droite d'intersection du plan du tableau avec le plan horizontal passant par le point de vue. Pour cette raison, on l'appelle la ligne d'horizon.

N.B. – Le plan du tableau étant vertical, les droites qui lui sont perpendiculaires sont des horizontales, et par conséquent leur point de fuite (c'est-à-dire le point de fuite principal) est situé sur la ligne d'horizon.
H est le plan horizontal passant par O.
ω est le point de fuite principal.



Les points de distance. Ce sont les points de fuite des droites horizontales faisant un angle de 45° avec la perpendiculaire au plan du tableau. Voici la situation vue de dessus : les points de distance sont les points x et y ; ils sont sur la ligne d'horizon.



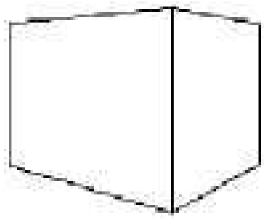
En outre, le triangle xOy est rectangle isocèle, d'où ωx = ωy = Oω. Donc la distance de x et y au point de fuite principal est égale à la distance du point de vue (c'est-à-dire de l'observateur) au plan du tableau. D'où leur nom.
Application : pour un tableau réalisé en perspective centrale, il existe un unique point de l'espace d'où on le voit (en fermant un œil) comme il a été conçu : c'est le point de vue. Ce qui précède permet de déterminer la position de ce point de vue lorsqu'on a repéré, sur le tableau, le point de fuite principal et l'un des points de distance. C'est par exemple le cas lorsque le sol représenté sur le tableau est constitué d'un dallage carré (voir ci-après la seconde application).

Applications au dessin

Les remarques faites dans le chapitre sur la perspective parallèle à propos de l'importance des exercices de dessin sont encore valables ici. Les applications qui suivent sont données à titre d'exemples, et sont en liaison avec les techniques mises en œuvre par les peintres de l'époque classique. Elles ne sont nullement imposées.

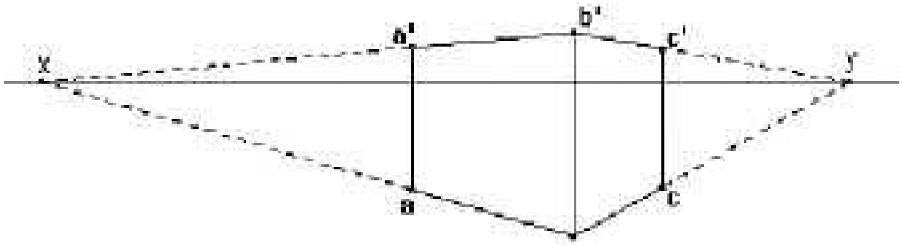
Application 1 : dessin d'une boîte posée sur une autre

Le dessin ci-dessous représente une boîte (pavé droit) posée sur le sol. On pose sur cette boîte une seconde boîte, identique. Dessiner cette seconde boîte.



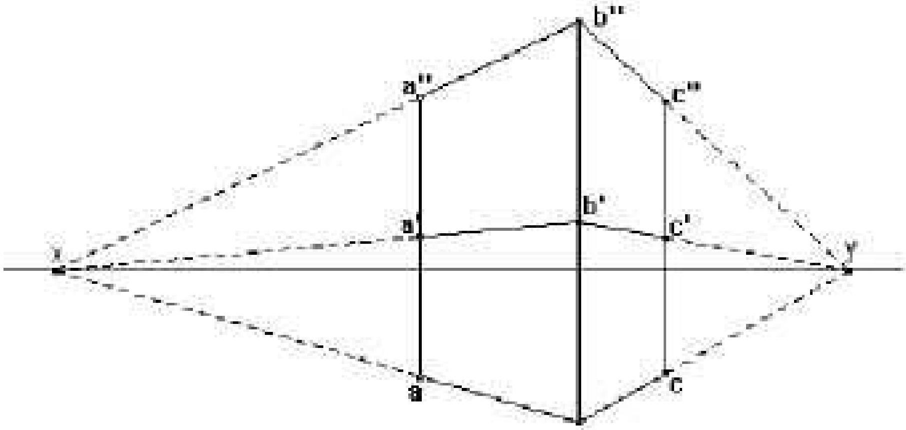
Solution possible

– Le dessin permet de placer les points de fuite x et y des directions des arêtes horizontales de la boîte, d'où la ligne d'horizon :



– L'arête « avant » de la boîte [bb'] est verticale, donc parallèle au plan du tableau. L'arête correspondante [b'b"] de la seconde boîte sera dans son prolongement et de même longueur (puisque le milieu est conservé pour les segments frontaux).

– Enfin, en joignant le point b" aux points de fuite x et y, et en prolongeant les segments [aa'] et [bb'], on termine le dessin de la seconde boîte :



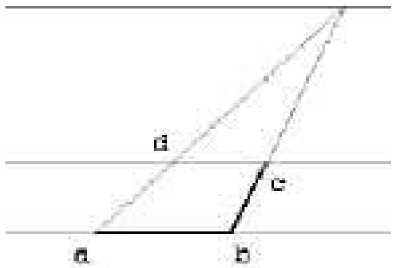
Contrôle

On vérifie que les points a' et c' sont les milieux respectifs de [aa"] et [bb"].

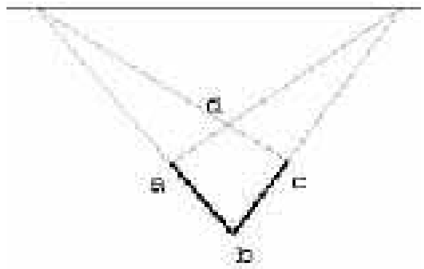
Application 2 : image d'un carré posé sur le sol

On se donne comme éléments de départ la ligne d'horizon et les images [ab] et [bc] de deux côtés consécutifs [AB] et [BC] d'un carré ABCD.

Étude de la configuration : les lignes parallèles qui portent les images des côtés opposés du carré sont sécantes sur la ligne d'horizon, sauf si ces côtés sont parallèles au plan du tableau et dans ce cas les lignes sont parallèles à la ligne d'horizon. On en déduit dans chaque cas la construction du point d :



Ligne d'horizon ω.



Ligne d'horizon.

N.B. – Si [AB] est parallèle au plan du tableau (figure de gauche), [BC] est perpendiculaire à ce plan : le point de fuite w est le point de fuite principal.

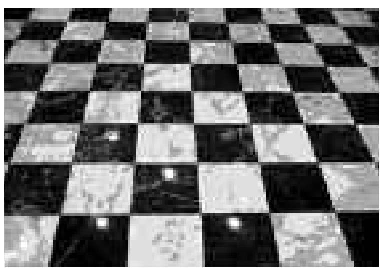
Application 3 : dessin d'un carrelage de sol

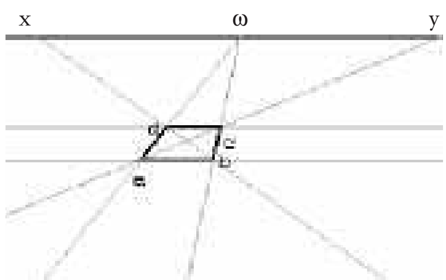
On se donne les mêmes éléments de départ et on doit construire les images des carrés voisins.

Étude de la configuration

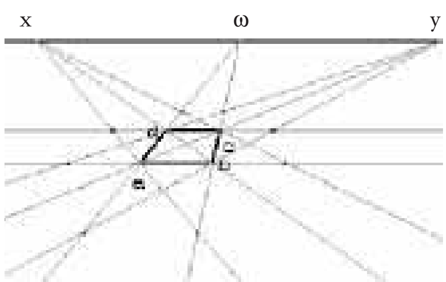
Les images des lignes parallèles entre elles du quadrillage ont un même point de fuite, situé sur la ligne d'horizon, ou bien sont parallèles entre elles et à la ligne d'horizon. Ceci est valable aussi bien pour les côtés des carrés que pour leurs diagonales.
On peut ainsi toujours utiliser au moins trois points de fuite qui permettent d'obtenir de proche en proche les sommets des carrés voisins.

N.B. – Dans le cas où [AB] est parallèle au plan du tableau, les diagonales font un angle de 45° avec la perpendiculaire au plan du tableau, leurs images ont donc comme points de fuite les points de distance x et y, symétriques par rapport au point de fuite principal ω.
Nous envisagerons conjointement les deux cas suivants[15] :

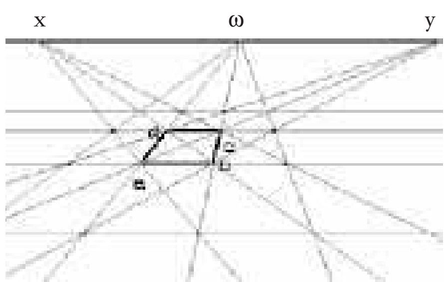




Étape 1

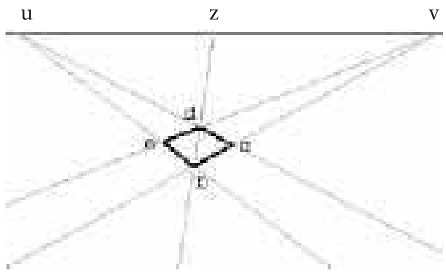


Étape 2

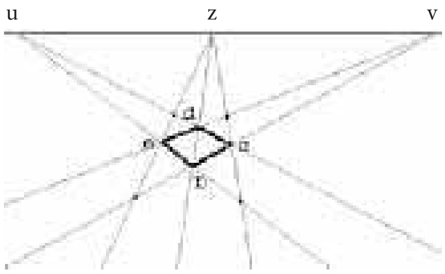


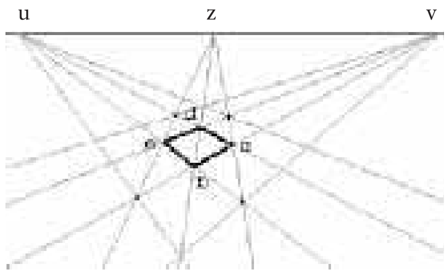
Étape 3

15. Photographies de F. Colmez.



Étape 1



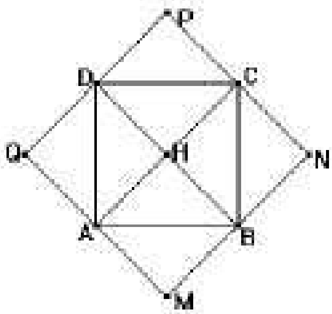


Étape 2 Étape 3

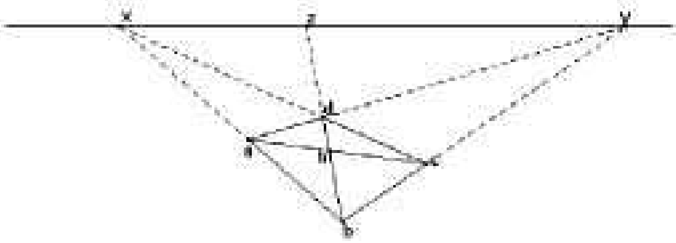
Contrôle

On vérifie les alignements sur les lignes qui n'ont pas été utilisées pour la construction.

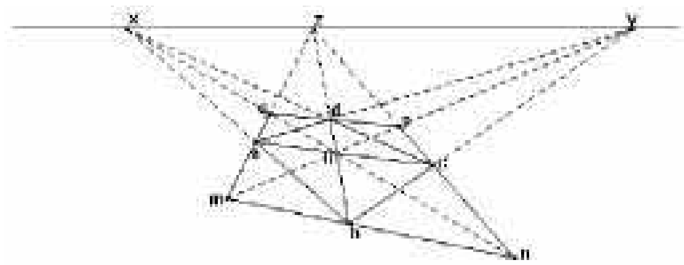
Application 4 : dessin d'un carré horizontal dont les milieux des côtés sont donnés
Le dessin d'un carré horizontal ABCD est donné. Réaliser le dessin du carré MNPQ dont les milieux des côtés sont les points A, B, C, D. Vue de dessus, la situation est la suivante :



Il s'agit de construire les images des carrés tels que AMBH, dont les côtés sont parallèles aux diagonales du carré ABCD.
Solution possible :
– On commence par tracer la ligne d'horizon à partir des points de fuite x et y des côtés du carré ABCD. Le point de fuite z de la diagonale [bd] peut alors être placé, contrairement à celui de [ac], qui se situe hors des limites de la feuille (ou, comme on dit, « de l'épure ») :



– L'image m du point M s'obtiendra comme intersection des droites (hy) et (az), et on procédera de façon analogue pour les trois autres sommets :

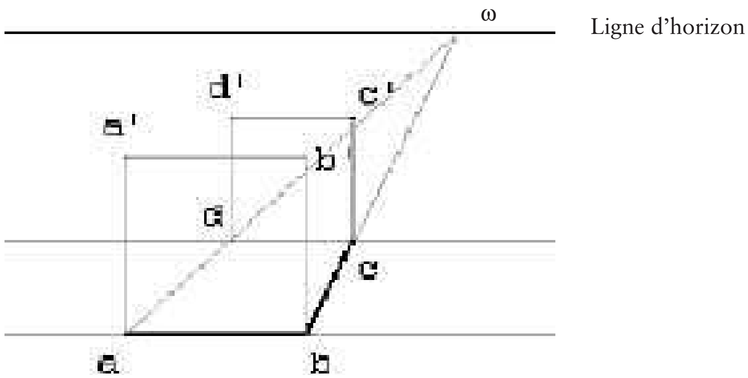


Application 5 : image d'un cube squelette posé sur le sol

Nous n'envisagerons que le cas où deux faces du cube sont frontales. On se donne comme éléments de départ la ligne d'horizon et les images deux arêtes consécutives, [AB] et [BC], de la base du cube

Étude de la configuration

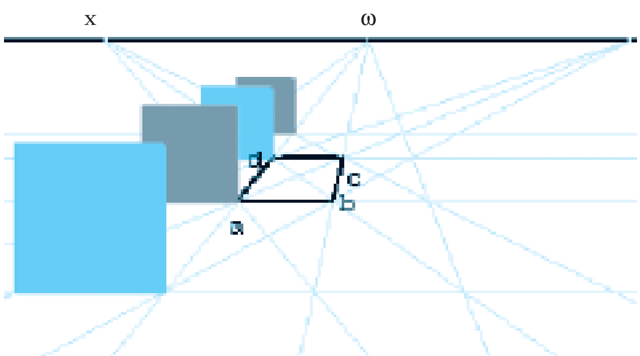
– Les images des arêtes verticales du cube sont des segments parallèles, perpendiculaires à la ligne d'horizon.
– Les images des arêtes horizontales parallèles entre elles ont pour point de fuite le point de fuite principal ω, ou bien sont parallèles à la ligne d'horizon.
– Les images des faces frontales du cube sont alors des carrés (nous avons vu qu'il n'y a pas de déformation dans ce cas).



Contrôle

(a'd') et (b'c') se coupent en ω.

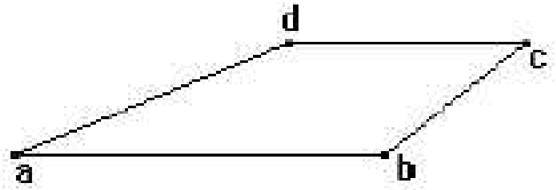
N.B. – Lorsqu'on a dessiné un carrelage de sol, on peut considérer des cubes dont les bases sont les carreaux qui viennent d'être dessinés
Ce faisant, on dispose d'une échelle de hauteurs pour l'ensemble du tableau. En particulier, connaissant la dimension des carreaux on va pouvoir, par exemple, dessiner des personnages à n'importe quel endroit, en étant à même de les représenter avec la «véritable» taille correspondant à leur position.



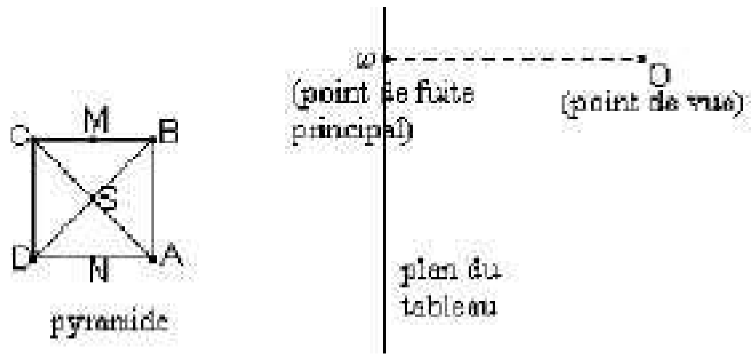
C'est cette propriété qui explique la grande fréquence des sols dallés figurant dans les tableaux datant des débuts de l'utilisation de la perspective.

Application 6 : dessin d'une pyramide régulière à base carrée posée sur le sol

Sur le dessin ci-dessous, on a commencé à dessiner la base d'une pyramide régulière à base carrée (S, ABCD), de base 20 cm et de hauteur 30 cm, posée sur le sol, dont deux arêtes de base sont parallèles au plan du tableau (à quoi le voit-on ?). Terminer le dessin de la pyramide.



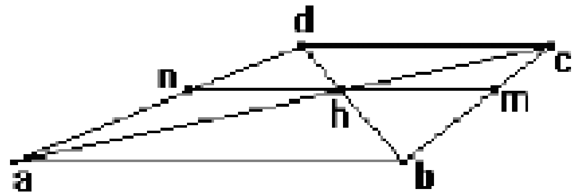
Vue de dessus, la situation est la suivante :



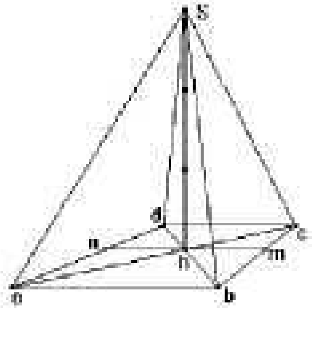
En fait, il ne reste plus qu'à dessiner le sommet, ce qu'on fera à partir du dessin de la hauteur [SH], où H est le centre de la base ABCD. Pour cela, considérons les milieux respectifs M et N des côtés [BC] et [AD]. Le triangle isocèle SMN est parallèle au plan du tableau, donc les directions seront conservées sur son image et il n'y aura pas de déformation. Comme dans la réalité on a HS = (3/2) NM (puisque MN = 20 cm et HS = 30 cm, il en ira de même sur le dessin, et on aura hs = (3/2) nm.

Solution possible :

– Le dessin h du centre H de la base s'obtient en traçant les diagonales du trapèze abcd, puis le dessin de la médiane [MN] de la base s'obtiendra en menant par h la parallèle à [ab] :



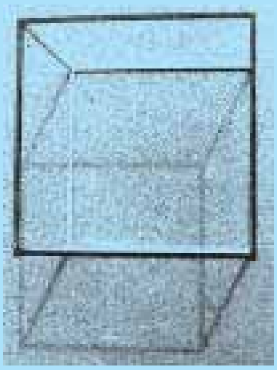
– Le dessin de la hauteur [hs] est vertical et on a hs = (3/2) nm, ce qui permet de placer le sommet S, puis de terminer le dessin de la pyramide :

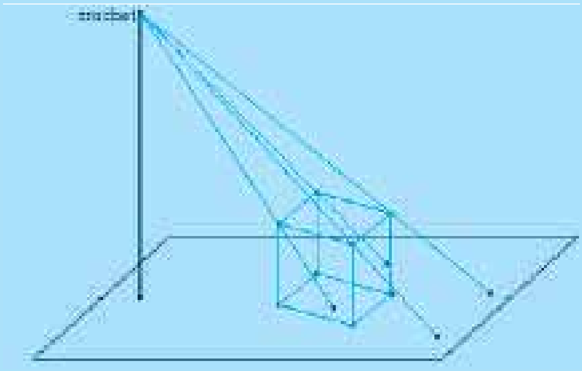


Du matériel pour l'étude des ombres

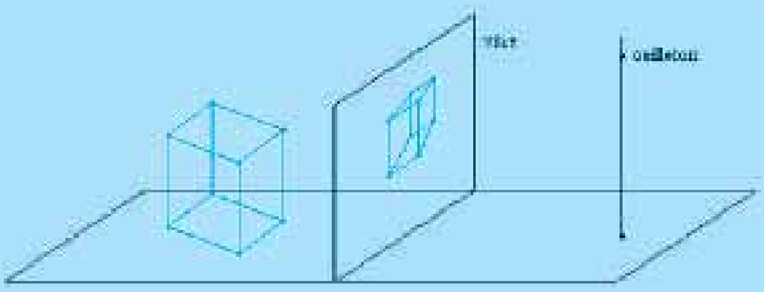
Pour ce qui est de l'ombre au soleil, le mieux est encore d'étudier réellement l'ombre au soleil, c'est-à-dire de profiter d'une journée ensoleillée pour faire observer aux élèves les ombres portées d'objets divers (piquet, fenêtre, corps humain…) sur un mur, le sol, une table… et en particulier les propriétés de l'objet qui semblent conservées sur l'ombre. On peut également se munir d'une planche recouverte d'un papier uni et d'un cube squelette[16], et faire observer l'ombre de ce cube sur la planche, pour diverses positions de la planche et du cube[17].

Pour l'ombre au flambeau, il est plus difficile de disposer d'une source ponctuelle suffisamment puissante, mais on peut aisément simuler le phénomène grâce à un matériel comme par exemple celui présenté ci-dessous. Il est constitué d'une planche recouverte de papier uni sur laquelle est fixé un piquet muni à son extrémité d'un crochet simulant la source lumineuse (ampoule électrique). Le cube squelette étant posé sur la planche, on tend quatre fils élastiques, simulant des rayons lumineux, entre d'une part le crochet et d'autre part la planche (à l'aide de punaises de dessinateur), de façon que chacun des fils effleure un sommet différent de la face supérieure du cube. On simule ainsi l'ombre des huit sommets du cube sur la planche, ce qui permet d'étudier ses propriétés.





On peut en particulier utiliser ce support physique pour réaliser des dessins géométriques dans des plans matérialisés par deux élastiques et montrer que l'image de la face supérieure du cube est bien un carré. Le dispositif connu sous le nom de « fenêtre de Dürer » est bien connu ; on peut le réaliser simplement à l'aide d'un cadre vitré et d'une tige portant un petit trou (œilleton), l'ensemble étant fixé sur une planche :



En visant l'objet à travers l'œilleton, on peut le dessiner sur la vitre à l'aide d'un crayon-feutre.
En basculant la planche du dispositif « flambeau » en position verticale, on fait apparaître son analogie avec la fenêtre de Dürer et la perspective centrale :

crochet (source lumineuse) ↔ œilleton ↔ point de vue
planche (plan où se porte l'ombre) ↔ vitre ↔ plan du tableau

La seule différence étant la position de l'objet par rapport à ces deux éléments.

16. Réalisé par exemple à l'aide de tiges de bois ou de pailles à boire.

17. Sur la photographie, le cube est posé sur la planche inclinée (face sombre au dessus). Le cliché en montre une perspective parallèle (son ombre)… et aussi une perspective centrale (son image photographique

Bibliographie

– Audibert Gérard, *La Perspective cavalière*, APMEP, 1990.
– Bessot Didier et Le Goff Jean-Pierre (dir.), *Les Cahiers de la perspective*, IREM de Caen.
– Descargues Pierre, *Traités de perspective*, Éd. du Chêne, 1976.
– Destainville Bernard, *Enseigner la géométrie dans l'espace au collège et au lycée*, APMEP, 1996.
– Colmez François et Parzysz Bernard, (1993), « Le vu et le su dans l'évolution de dessins de pyramides, du CE2 à la seconde », in Bessot Annie et Vérillon Pierre (dir.), *Espaces graphiques et graphismes d'espaces. Contribution de psychologues et de didacticiens à l'étude de la construction des savoirs spatiaux,* Grenoble, La Pensée sauvage, p. 35-55.
– Colmez François, Parzysz Bernard et Thomas Christine, « L'enseignement de la géométrie dans l'espace en BTS d'arts appliqués », *Repères-IREM*, n° 9, 1992, p. 93-98.

Impression Jouve
11, bd de Sébastopol
75001 Paris

Dépôt légal : janvier 2006