DM n=°2

Exercice 1: Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que:

$$f(2)=1 \quad \text{et} \quad f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$$

a) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de f au point x=2
b) Donner une valeur approchée de f(2,1) et f(1,9) en utilisant la question précédente.
c) Soit g une fonction définie sur IR et qui vérifie:

$$g(2)=1 \quad \text{et} \quad g'(x)=\frac{1}{1+x^2}$$

Montrer que pour tout x réel, f(x)=g(x).

a) $f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$ donc $f'(2)=\frac{1}{5}$ donc l'équation de la tangente est : $y=0,2(x-2)+1=0,2x+0,6$
b) $f(2,1)\simeq 0,2*2,1+0,6$ donc $f(2,1)\simeq 1,02$
$f(1,9)\simeq 0,2*1,9+0,6$ donc $f(1,9)\simeq 0,98$
c) On définit h une fonction telle que h(x)=g(x)-f(x) pour $x\in\mathbb{R}$.
h(2)=0 et h'(x)=0 sur $\mathbb{R}$ donc h est constante sur $\mathbb{R}$: comme h(0)=0 , on en déduit que h est nulle et que donc f(x)=g(x) pour tout x réel.

Exercice 2: Aire maximale d'un trapèze

Soit ABCD un trapèze de grande base [AB] tel que AD=DC=CB=4cm.

On appelle θ la mesure de l'angle $\widehat{BAD}$ appartenant à $[0;\frac{\pi}{2}]$.

a) Faire une figure.
b) Exprimer l'aire du trapèze ABCD en fonction de θ **.**
c) Soit f la fonction définie sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ par: $f(x)=(\cos x+1)\sin x$.

Démontrer que $f'(x)=2(\cos x+1)\left(\cos x-\frac{1}{2}\right)$

Etudier le sens de variation de f sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ **.**

d) En déduire la valeur pour laquelle, l'aire du trapèze est maximale et déterminer cette aire maximale.

a)

b) Hauteur du trapèze : $4\times\sin(\theta)$ Petite base : 4 Grande base: $4+8\cos(\theta)$

Aire: $4\times\sin(\theta)\times\frac{4+4+8\cos(\theta)}{2}=16(\sin(\theta)(\cos(\theta)+1))$

c) $f'(x)=\cos(x)(\cos(x)+1)+\sin(x)(-\sin(x))=\cos^2(x)+\cos(x)-\sin^2(x)$

Et comme $\cos^2 x+\sin^2 x=1$, $f'(x)=2\cos^2 x+\cos x-1$

Par ailleurs, on développe l'expression proposée par l'énoncé:

$$2(\cos x+1)\left(\cos x-\frac{1}{2}\right)=2(\cos^2 x+\cos x-\frac{1}{2}\cos x-\frac{1}{2})=2\cos^2 x+\cos x-1=f'(x)$$

Sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, le signe de f'(x) est celui de $\cos x-\frac{1}{2}$ (car cos x +1 est positif).

Sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, cos est strictement décroissante et $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$ donc : f est croissante sur $\left[0;\frac{\pi}{3}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{2}\right]$

d) Le maximum de f est atteint pour $x=\frac{\pi}{3}$ et il vaut: $16\times\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{3}{2}=12\sqrt{3}$

Exercice 3 : Existe-t-il une tangente commune aux courbes représentatives des fonctions $f(x)=x^2$ définie sur $\mathbb{R}$ et $g(x)=\frac{1}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$?

Equation de la tangente à Cf pour x=a : $y=2a(x-a)+a^2=2ax-a^2$

Equation de la tangente à Cg pour x=b: $y=\frac{-1}{b^2}(x-b)+\frac{1}{b}=\frac{-1}{b^2}x+\frac{2}{b}$

Ces deux droites sont confondues si et seulement si elles ont même coefficient directeur et même ordonnées à l'origine.

$\begin{cases}2a=\frac{-1}{b^2}\\-a^2=\frac{2}{b}\end{cases}$ $\begin{cases}a=\frac{-1}{2b^2}\\-\left(\frac{-1}{2b^2}\right)^2=\frac{2}{b}\end{cases}$ on résout la deuxième équation: $\frac{-1}{4b^4}=\frac{2}{b}$ et $b^3=\frac{-1}{8}$

Cette équation a une seule solution (la fonction cube étant strictment monotone et continue sur $\mathbb{R}$) : $b=\frac{-1}{2}$

On en déduit : $a=-2$

Il existe une seule tangent commune à ces deux courbes : la droite d'équation y=-4x-4 qui est tangente à Cf pour x=-2 et à Cg pour $x=\frac{-1}{2}$.