Olympiades de mathématiques 2014
Corrections

## Exercice 1

**Partie A : Diviseurs premiers**

1. Nombres premiers : 2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,37,41,43,47,53,59.
2. Les diviseurs premiers de 2014 sont 2 ; 19 et 53

**Partie B : Décomposition d'un nombre entier naturel *a* en *base b***

1. 35 = 32 + 2 +1 = $1\times 2^5 + 1\times 2^1 + 1\times 2^0$

Divisions …

2. 2014 = $(11111011110)_2$ car $2014 = 2^{10} + 2^9 + 2^8 + 2^7 + 2^6 + 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^1$

Divisions …

**Partie C : Nombres brésiliens**

1. Nombre 221
   a. 221 = $13\times 17$
   b. 221 = $13\times 17 = 13\times(16+1) = 13\times 16 + 13$ et 13<16 donc 221= $(13\text{-}13)_{16}$
      221 = $13\times 17 = (12+1)\times 17 = 12\times 17 + 17$ mais 17>12 donc on n'a pas de décomposition en base 12.
2. 2014 est un nombre BRÉSILIEN

On remarque que 221 est brésilien dans la base 16 qui est 17-1, **diviseur-1**
Donc on essaye de trouver une décomposition de 2014 dans une base **diviseur -1**

- dans la base 19-1 = 18 :

2014 = $2\times 19\times 53 = 106\times 19 = 106\times(18+1) = 106\times 18+106$ donc 2014=$(106\text{-}106)_{18}$
mais 106>18 donc ce n'est pas une décomposition !!!!

- dans la base 53-1=52 :

2014 = $2\times 19\times 53 = 38\times 53=38\times(52+1)=38\times 52+38$ donc 2014 = $(38\text{-}38)_{52}$
c'est une décomposition en base 52 donc 2014 est BRÉSILIEN

- dans la base $2\times 19$ -1 = 37

2014 = $53\times 38 = 53\times(37+1) = 53\times 37+53$ mais 53 >37 ce n'est pas une décomposition.

- dans la base $2\times 53 - 1 = 105$

2014 = $19\times 106 = 19\times(105+1)= 19\times 105 + 19$ et 19<105 donc 2014 = $(19\text{-}19)_{105}$ c'est une décomposition en base 105, donc 2014 est bien BRÉSILIEN

- dans la base $19\times 53 - 1 = 1006$

2014 = $2\times 1007 = 2\times(1006+1) = 2\times 1006 + 2$ et 2 < 1006 donc 2014 = $(2\text{-}2)_{1006}$ c'est une décomposition en base 1006, donc 2014 est bien BRÉSILIEN

## Exercice 2

1-1/ On note F pour fleur et B pour bonhomme. Il y a **2 guirlandes à 1 seul élément** : B et F
1-2/ Il y a **3 guirlandes à 2 éléments** (FF, FB et BF).
1-3/ Avec 3 éléments, on trouve **5 guirlandes** (FFF,FFB,FBF,BFF et BFB)
Avec 4 éléments, on trouve **8 guirlandes** (FFFF,FFFB,FFBF,FBFB;FBFF,BFFB,BFFF et BFFF)
1-4/ Pour créer une guirlande à 5 éléments, on prend une guirlande à 4 éléments et on ajoute à la fin un élément. On peut ajouter un F à toutes les guirlandes. On peut ajouter un B à celles se terminant par F uniquement.
Parmi les 8 guirlandes à 4 éléments, il y en a 3 qui finissent par B et 5 qui finissent par F.
On peut donc en créer 8 en ajoutant un F et 5 en ajoutant un B. 8+5=13. On peut donc créer 13 guirlandes à 5 éléments.
On peut ensuite réitérer le processus :

| Nombre d'éléments | Guirlandes finissant par F | Guirlandes finissant par B | Nombre de guirlandes |
|---|---|---|---|
| 4 | 5 | 3 | 8 |
| 5 | 8 | 5 | 13 |
| 6 | 13 | 8 | 21 |
| 7 | 21 | 13 | 34 |
| 8 | 34 | 21 | 55 |
| 9 | 55 | 34 | 89 |
| 10 | 89 | 55 | 144 |

On peut donc créer **144 guirlandes différentes à 10 éléments.**

Autre méthode : Si on appelle In le nombre de guirlandes à n éléments, le raisonnement précédent permet d'aboutir à la relation In+2 = In+1 + In .
2/ On adopte le codage suivant : F pour fleur, B pour bonhomme et S pour soleil
Avec 1 éléments, on peut créer 3 guirlandes : F, B et S.
Ensuite on fait le même raisonnement : On peut ajouter un F à toutes les guirlandes. On peut ajouter un B aux guirlandes finissant par F ou S. On peut ajouter un S aux guirlandes finissant par F ou B.

| Nombre d'éléments | Guirlandes finissant par F | Guirlandes finissant par B | Guirlandes finissant par S | Nombre de guirlandes |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 3 |
| 2 | 3 | 2 | 2 | 7 |
| 3 | 7 | 5 | 5 | 17 |
| 4 | 17 | 12 | 12 | 41 |
| 5 | 41 | 29 | 29 | 99 |
| 6 | 99 | 70 | 70 | 239 |
| 7 | 239 | 169 | 169 | 577 |
| 8 | 577 | 408 | 408 | 1393 |
| 9 | 1393 | 985 | 985 | 3363 |
| 10 | 3363 | 2378 | 2378 | 8119 |

On peut donc créer **8119 guirlandes à 10 éléments respectant ces contraintes.**
Remarque : Certains élèves auront peut-être fait apparaître la relation de récurrence In+2 = 2In+1 + In .

**Exercice 3**

1) De nombreuses méthodes sont possibles : en construisant des triangles équilatéraux à partir de certains des côtés de l'hexagone on peut obtenir un parallélogramme ou un triangle équilatéral qui permettent de conclure, on peut aussi utiliser la trigonométrie (avec les hauteurs par exemple)…
2) Pour la transformation A, 2 côtés opposés de l'hexagone sont parallèles donc (EE1) et (FF1) sont parallèles et EE1 = FF1 donc EFF1E1 est un parallélogramme et les angles correspondants F1E1E et FED ont même mesure (120°).
   On procède de manière similaire pour les autres angles.
   Pour la transformation B, en plaçant un point G extérieur à l'hexagone tel que EFG soit équilatéral, on constate que E1F1G est aussi équilatéral. Ainsi (EF) et (E1F1) sont parallèles et les angles mesurent toujours 120°.
3) a) Plusieurs solutions envisageables.
   Par exemple :
   Par une opération B sur E et F on obtient a = f. Par une opération A sur A, E et F on obtient a = e. une opération B sur B et C permet d'avoir a = b. Ainsi a = e = f = b et avec les égalités du 1) on montre que c et d sont alors aussi égales.
   b) On peut transformer H et H' en deux hexagones réguliers. Avec trois transformations A on peut changer la longueur du côté de l'hexagone régulier. Les transformations étant réversibles on peut finalement transformer H en un hexagone régulier de côté 1 puis transformer cet hexagone en H'.

4) On applique A pour avoir deux côtés parallèles de longueur 6 (les autres côtés font 1), on applique B pour réduire un coté de longueur 6 à une longueur 5 (les deux côtés que l'on a étirés mesurent alors 2 et on a comme longueur 1, 6, 1, 2, 5, 2), on termine en appliquant une transformation A à un côté de longueur 1 et un côté de longueur 2 en les allongeant de 2 (les côtés mesurent 1, 6, 3, 2, 5, 4).

## Exercice 4 (techno)

**Question préliminaire**

Il y a 28 couples $(a, b)$ d'entiers naturels vérifiant la condition $0 \leq a \leq b \leq 6$.

**Partie A.**

La somme des points portés par les 28 dominos est 168.

| | | |
|---|---|---|
| Pour les 7 dominos | $(0;0)$, $(0;1)$, $(0;2)$, $(0;3)$, $(0;4)$, $(0;5)$, $(0;6)$ | la somme des points est 21 |
| Pour les 6 dominos | $(1;1)$, $(1;2)$, $(1;3)$, $(1;4)$, $(1;5)$, $(1;6)$ | la somme des points est 27 |
| Pour les 5 dominos | $(2;2)$, $(2;3)$, $(2;4)$, $(2;5)$, $(2;6)$ | la somme des points est 30 |
| Pour les 4 dominos | $(3;3)$, $(3;4)$, $(3;5)$, $(3;6)$ | la somme des points est 30 |
| Pour les 3 dominos | $(4;4)$, $(4;5)$, $(4;6)$ | la somme des points est 27 |
| Pour les 2 dominos | $(5;5)$, $(5;6)$ | la somme des points est 21 |
| Pour le domino | $(6;6)$ | la somme des points est 12 |

Le total des points est $21 + 27 + 30 + 30 + 27 + 21 + 12 = 168$.

Si chacun des sept joueurs avait une somme de points strictement inférieure à 24, alors la somme totale des points portés par tous les dominos du jeu serait strictement inférieure à $24 \times 7 = 168$ ce qui est impossible. Il y a donc au moins un joueur dont la somme des points portés par les dominos qu'il a reçus est supérieure ou égale à 24.

**Partie B.**

1. La somme des points des 28 dominos est égale à 168. L'entier $n$ est un diviseur de 28, donc les valeurs possibles de $n$ sont : 2, 4, 7, 14, 28. Le nombre 168 est aussi divisible par 2, 4, 7, 14, 28.
   $n = 28$ n'est pas possible.
   $n = 14$ implique que chacun des joueurs possède deux dominos et que la somme des points marqués sur ces deux dominos soit toujours égale à 12.
   Un exemple de répartition possible est :
   $\{(6;6);(0;0)\}$ $\{(5;6);(0;1)\}$ $\{(4;6);(0;2)\}$ $\{(3;6);(0;3)\}$ $\{(2;6);(0;4)\}$ $\{(1;6);(0;5)\}$ $\{(0;6);(3;3)\}$
   $\{(5;5);(1;1)\}$ $\{(4;5);(1;2)\}$ $\{(3;5);(1;3)\}$ $\{(2;5);(1;4)\}$ $\{(1;5);(2;4)\}$ $\{(4;4);(2;2)\}$ $\{(3;4);(2;3)\}$.
   À partir de cette répartition, on obtient par regroupement les répartitions possibles pour 7 joueurs, et pour 2 joueurs.

   Pour 4 joueurs, on remarque que la somme est alors $42 = 3 \times 12 + 6$. Il y a quatre dominos dont la somme des points est 6. Une répartition possible est :
   $\{(6;6);(0;0);(5;6);(0;1);(4;6);(0;2);(0;6)\}$ $\{(3;6);(0;3);(2;6);(0;4);(1;6);(0;5);(3;3)\}$
   $\{(5;5);(1;1);(4;5);(1;2);(3;5);(1;3);(1;5)\}$ $\{(2;5);(1;4);(4;4);(2;2);(3;4);(2;3);(2;4)\}$
2. Il y a 27 dominos dont la somme des points marqués est toujours 168. L'entier $n$ divise 27 donc $n = 3$ ou $n = 9$ ou $n = 27$.
   $n = 27$ n'est pas possible.
   $n = 9$ n'est pas possible car 168 n'est pas divisible par 9
   $n = 3$ est possible, chaque joueur reçoit 9 dominos et un total de points de $168 \div 3 = 56$. La somme des points marqués pour chacun des joueurs est $56 = 4 \times 12 + 8$. Il y a trois dominos dont la somme des points est égale à 8. À chacun de ces trois dominos on associe huit dominos dont la somme des points est 48. On se sert, pour cela de la répartition obtenue ci-dessus. Une répartition possible est
   $\{(4;4);(5;6);(0;1);(4;6);(0;2);(3;6);(0;3);(1;6);(0;5)\}$
   $\{(3;5);(0;6);(3;3);(5;5);(1;1);(4;5);(1;2);(2;5);(1;4)\}$
   $\{(2;6);(1;5);(2;4);(3;4);(2;3);(0;4);(6;6);(1;3);(2;2)\}$.

**Partie A**

On choisit AD comme unité de longueur, autrement dit AD = 1.

**1.** $x$ est le rapport entre la longueur et la largeur du rectangle ABCD donc $x = \dfrac{AB}{AD}$ or AD = 1

AB = $x$

$\dfrac{AB}{AD} = \dfrac{BC}{BE} = x$ et AD = BC = 1 d'où $\dfrac{1}{BE} = x \Leftrightarrow BE = \dfrac{1}{x}$

**2.** $AB = AE + BE \Leftrightarrow x = 1 + \dfrac{1}{x} \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0$

**3.** $x^2 - x - 1 = 0$

$\Delta = 5$ donc $x_1 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = \phi$

**Partie B**

**1.** N = 6

| I | C | A | B |
|---|---|---|---|
| | | 1 | 1 |
| 1 | 2 | 1 | 2 |
| 2 | 3 | 2 | 3 |
| 3 | 5 | 3 | 5 |
| 4 | 8 | 5 | 8 |
| 5 | 13 | 8 | 13 |
| 6 | 21 | 13 | 21 |

À l'affichage, on obtient la suite suivante de nombres : 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13

**2.** Les quinze premiers termes sont 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610

**Partie C**

$\phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

**1.** $\phi^2 = \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \dfrac{1+2\sqrt{5}+5}{4} = \dfrac{6+2\sqrt{5}}{4} = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ et $\phi + 1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} + 1 = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$

Donc $\phi^2 = \phi + 1$

$\dfrac{1}{\phi} = \dfrac{2}{1+\sqrt{5}} \times \dfrac{1-\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}} = \dfrac{2(1-\sqrt{5})}{-4} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ et $\phi + 1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} - 1 = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

Donc $\dfrac{1}{\phi} = \phi - 1$

**2.** On sait que $\phi^2 = \phi + 1$

$\phi^3 = \phi^2 \times \phi = (\phi + 1) \times \phi = \phi^2 + \phi = \phi + 1 + \phi = 2\phi + 1$

$\phi^4 = \phi^3 \times \phi = (2\phi + 1) \times \phi = 2\phi^2 + \phi = 2(\phi + 1) + \phi = 3\phi + 2$

$\phi^5 = \phi^4 \times \phi = (3\phi + 2) \times \phi = 3\phi^2 + 2\phi = 3(\phi + 1) + 2\phi = 5\phi + 3$

**3.** Si $\phi^n = a\,\phi + b$ avec $n$, $a$ et $b$ des entiers naturels alors

$\phi^{n+1} = \phi^n \times \phi = (a\,\phi + b) \times \phi = a\,\phi^2 + b\,\phi = a\,(\phi + 1) + b\,\phi = (a + b)\,\phi + a$

**4. a.** On en déduit que $\phi^6 = 8\,\phi + 5$, $\phi^7 = 13\,\phi + 8$ et que $\phi^8 = 21\,\phi + 13$

On remarque que les coefficients $a$ et $b$ sont les nombres de la suite de Fibonacci

**b.** $\phi^{15} = 610\,\phi + 377$

**5.** $\phi^n + \phi^{n-1} = \phi^n + \phi^n \times \phi^{-1} = \phi^n\,(1 + \phi^{-1}) = \phi^n\,\left(1 + \dfrac{1}{\phi}\right) = \phi^n\,(1 + \phi - 1) = \phi^n \times \phi = \phi^{n+1}$